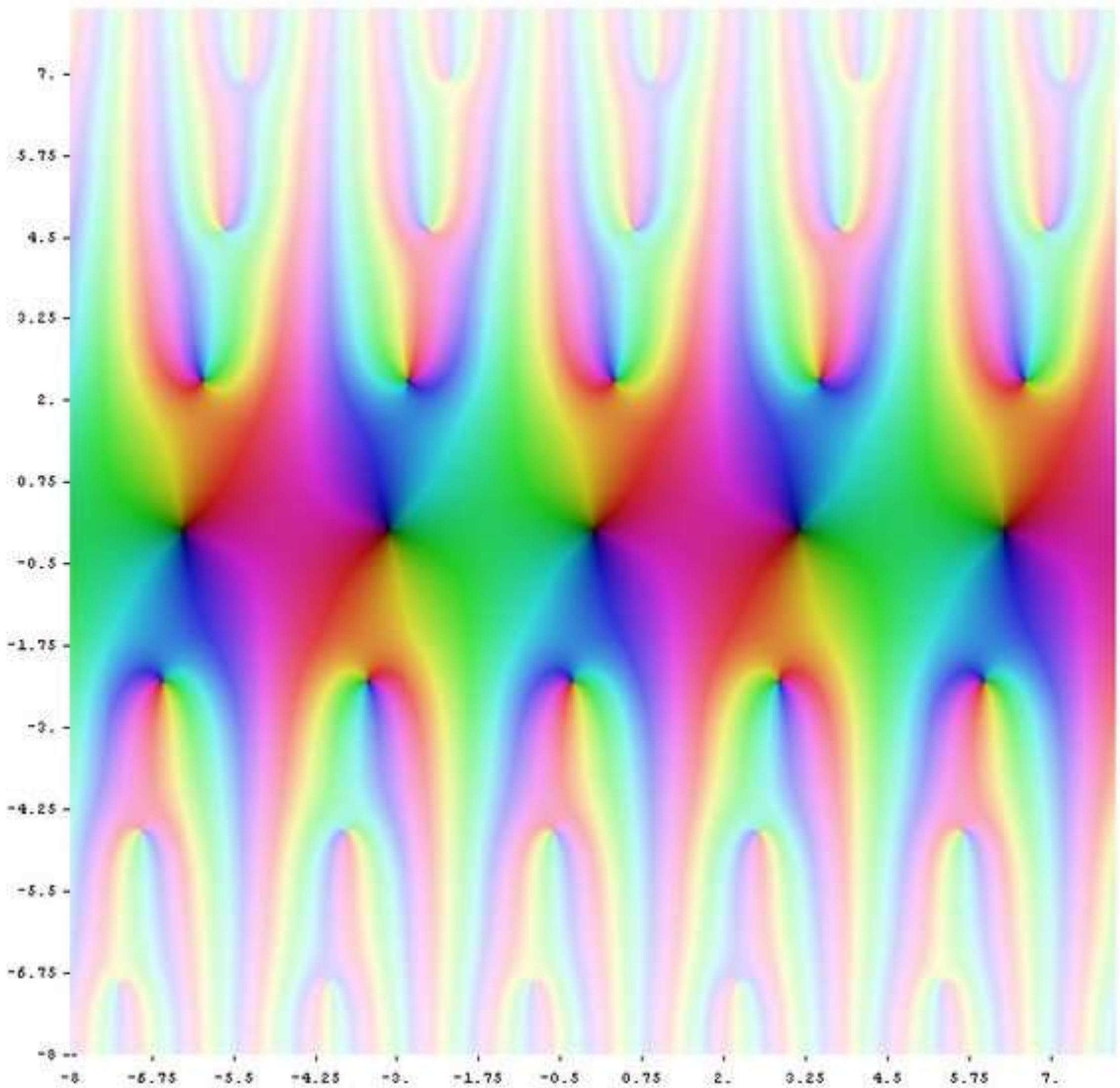
రామానుజన్ నుండి ఇటూ, అటూ



వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు తెలుగు పుస్తకాలు

1. English-Telugu & Telugu-English Dictionary & Thesaurus, Asian Educational Services, New Delhi, 2002. ఈ నిఘంటువుని తెలుగు వికీపీడియాలో ఉచితంగా కూడ సంప్రదించవచ్చు. https://te.wikipedia.org/wiki/
2. జీవరహశ్యం, ప్రతులు అలభ్యం
3. రసగంధాయ రసాయనం, ప్రతులు అలభ్యం
4. కించిత్ భోగో భవిష్యతి, ప్రతులు అలభ్యం (వైజ్ఞానిక కథలు)
5. అమెరికా అనుభవాలు, ఎమెస్కో
6. జీవనది: రక్తం కథ, కినిగె.
7. నిత్యజీవితంలో రసాయనశాస్త్రం, కినిగె.
8. విశ్వస్వరూపం, కినిగె.
9. ప్రాణి ఎలా పుట్టింది?, కినిగె.
10. మహాయానం, కినిగె. (వైజ్ఞానిక కల్పనలు)

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు జీవిత సంగ్రహం

భారతదేశంలో తుని, మచిలీపట్నం, కాకినాడలలో విద్యాభ్యాసం. ఉన్నత విద్యకి 1961 లో అమెరికా ప్రయాణం. ప్రస్తుతం యూనివర్సిటీ ఆఫ్ కేలిఫోర్నియా, డేవిస్ కేంద్రంలో విశ్రాంత ఆచార్యులు. నివాసం ప్లెజంటన్, కేలిఫోర్నియాలో. సైన్సు విషయాల మీద విశేషంగా తెలుగులో రాసేరు. యూనివర్సిటీ ఆఫ్ కేలిఫోర్నియా, బర్క్లీ కేంద్రంలో తెలుగు పీఠం స్థాపించడానికి అవిరామంగా పాటుపడుతున్నారు.

విషయ సూచిక

తొలిపలుకు

1. రామానుజన్ స్నేహితులు

2. సహజ సంఖ్యలు

3. నిష్ప సంఖ్యలు

4. అనంతాలు

5. జంట సంఖ్యలు

6. అర్థగర్భితమైన శ్లోకాలు

7. రామానుజన్ నుండి భార్గవ దాకా

8. ప్రధాన సంఖ్యలు

9. ప్రధాన సంఖ్యలలో కవలలు

10. రీమాన్ శిష్టాభిప్రాయం

11. π– రామానుజన్ స్నేహితురాలు

సాంకేతిక పదాలకి అర్థాలు

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు ఇతర రచనలు

తొలిపలుకు

ఈ పుస్తకం అంకెల గురించి, సంఖ్యల గురించి. సంఖ్యా జ్ఞానం, సంఖ్యా గణితం నలుగురికీ అందుబాటులోకి తీసుకురావాలని చేసిన ప్రయత్నం ఇది. అంకెలతోను, సంఖ్యలతోను ఆడుకోవడమే ఈ పుస్తకం ముఖ్యోద్దేశం. గణితంతో కొద్దిపాటి పరిచయం ఉన్న వారికి కూడ అందుబాటులో ఉండాలనే గమ్యంతో చేసిన ప్రయత్నం ఇది. గణితంలో నిష్ణాతుల ఆక్షేపణలకి గురి కాకూడదనేది కూడ ఒక గమ్యమే.

ఇలా సంఖ్యలతో చెలగాటాలు ఆడిన వారిలో అగ్రగణ్యుడు శ్రీ శ్రీనివాస రామానుజన్! ఈయన మన అదృష్టం కొద్దీ భారతదేశంలో పుట్టేడు; మన దురదృష్టం కొద్దీ అతి చిన్న వయస్సులోనే స్వర్గస్తుడయాడు. అయన ప్రతిభకి ప్రపంచంలో గుర్తింపు వచ్చిన తరువాత పట్టుమని అయిదేళ్లయినా బతకలేదు. ఈ అత్యల్పకాలంలో ఆయన మహోన్నతమైన శిఖరాగ్రాలని చేరుకున్నాడన్న విషయం ఆయన మరణించి దశాబ్దాలు గడచిన తరువాత కాని పండితులకే అవగాహన కాలేదు – పామరుల సంగతి సరేసరి! రామానుజన్ ప్రతిభని మొట్టమొదట గుర్తించిన హార్డీ అంటారు: “ఒక కొలమానం మీద నా ప్రతిభ 25 అయితే, అదే కొలమానం మీద నా సహాధ్యాయి లిటిల్వుడ్ ప్రతిభ 30 ఉండొచ్చు. అదే కొలమానం మీద డేవిడ్ హిల్బర్ట్ ప్రతిభ 50 ఉంటుంది, రామానుజన్ ప్రతిభ 100 ఉంటుంది.” ఈ జాబితాలో పేర్కొన్న నలుగురు వ్యక్తులూ గణిత ప్రపంచంలో హేమాహేమీలే!

ఈ పుస్తకం రామానుజన్ జీవిత చరిత్ర కాదు – అది చాల చోట్ల ఉంది. కొంతవరకు ఇది అయన గణితం గురించి. కొమ్ములు తిరిగిన వారు కూడ ఏళ్ల తరబడి శ్రమిస్తేకాని అయన “నోటు పుస్తకాలు” లో రాసుకున్న “ఫార్ములాలు” అర్థం చేసుకోలేకపోతున్నారు. అయన చేసిన పని మనకి అర్థం కాదని ఎన్నాళ్ళిలా ఊరుకుంటాం? అందుకని నాకు తోచిన ప్రయత్నం నేను చేసేను. ఎలా చేసేను? గణితశాస్త్రంలో తారసపడే కొన్ని అంశాలు – నాకు అర్థం అయినవి – తీసుకుని వాటిల్లో రామానుజన్ పాత్ర ఏమిటో సందర్భం దొరికినప్పుడల్లా స్థూలంగా పరిశీలించేను. ఈ పుస్తకంలో ఉన్న ప్రతి అధ్యాయం లోనూ రామానుజన్ కనిపించకపోవచ్చు. కొన్ని అంశాలు రామానుజన్ ముందు కాలంలో జరిగినవి, కొన్ని తరువాత కాలంలో జరిగినవి. అందుకనే పుస్తకానికి “రామానుజన్ నుండి ఇటూ, అటూ” అని పేరు పెట్టేను.

రామానుజన్ చేసిన పని అంతా బయటి గణిత ప్రపంచంతో సంబంధం లేకుండా తనంత తానుగా నిర్మించుకున్న భవనం. అయన సాధించిన ఫలితాలలో అక్కడక్కడ తప్పులు లేకపోలేదు. రామానుజన్ ఆవిష్కరించిన ఫలితాలు కొన్ని గణిత ప్రపంచంలో ఉన్న నిష్ణాతులకి అప్పటికే తెలుసు; కాని ఆ విషయం రామానుజన్ కి తెలియదు. కనుక "ఎవరు ముందు?" అనే ప్రశ్న ఉదయించినప్పుడు ఏ గురువు లేకుండా, ఏ పుస్తకాలు లేకుండా తనంత తానుగా నేర్చుకున్న రామానుజన్ కి కొంత ఘనత ఇవ్వక తప్పదు. రామానుజన్ ప్రతిభని మరి కొంచెం ముందుగా గుర్తించి ఆయనకి తగిన శిక్షణ ఇప్పించి ఉండుంటే అయన ప్రభావం నేటి తరం మీద ఇంకా గట్టిగా పడి ఉండేది.

రామానుజన్ ప్రతిభ గణితంలో అనేక శాఖలలో కనిపిస్తూ ఉంటుంది. వాటన్నిటిని సమగ్రంగా పరిశీలించడానికి ఇది అనువైన స్థలం కాదు. స్థాలీపులాక న్యాయంలా ఏవో నాలుగు మెతుకులు చిదిమి చూపిస్తాను. ఈ పుస్తకం చదివిన తరువాత రామానుజన్ చేసిన పని మీద కొంతైనా కుతూహలం పుడుతుందనే నా ఆశ. గణితంలో ప్రవేశం ఉన్న వారు పుస్తకంలో అధ్యాయాలని ఏ వరుస క్రమంలో చదివినా పరవా లేదు. గణితంలో కుతూహలం ఉండి నేర్చుకోవాలనే సద్యోజాత ఆసక్తి ఉన్నవారు మాత్రం నేను అమర్చిన క్రమంలో చదివితే మార్గం సుగమం అవుతుంది.

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు

ప్లెజంటన్, కేలిఫోర్నియా, 2015

ముఖచిత్రం

రామానుజన్ మరణ శయ్య మీద పరుండి కనిపెట్టిన "మాక్ తీటా ఫంక్షన్" ని కవ్యూటర్ సహాయంతో చిత్రిస్తే ఈ విధంగా ఉంటుంది. త్రిగుణమాత్రకంలో వచ్చే సైను, కోసైను లా ఇది కూడ ఒక రకమైన ఆవర్తన లక్షణం ప్రదర్శించడమే కాకుండా వాటి కంటె ఎక్కువ వ్యాపకత్వం కలది కనుక దీని ఉపయోగం ఆధునిక భౌతిక శాస్త్రంలో ఎక్కువ ఉంటుందని భావిస్తున్నారు.

1. రామానుజన్ స్నేహితులు

గణితంలో 'నభూతో నభవిష్యతి' అనిపించుకున్న మహా మేధావి శ్రీనివాస రామానుజన్ (22 December 1887 – 26 April 1920) లండన్ లో ఉన్న రోజులలో, "అంకెలు అతని సంగడికాళ్ళు" అన్నాడుట లిటిల్వుడ్ అనే పేరుమోసిన మరొక గణిత శాస్త్రవేత్త. సంగడికాడు అంటే స్నేహితుడు. స్నేహితులతోటీ, బొమ్మలతోటీ పిల్లలు ఆడుకున్నట్లే, రామానుజన్ అంకెలతో ఆడుకునేవాడని తాత్పర్యం.

బొమ్మ 1.1. శ్రీనివాస రామానుజన్

1.1 టేక్సీ సంఖ్యలు

ఒక సారి జబ్బుతో మంచం పట్టి ఉన్న రామానుజన్ ని చూడటానికి ప్రొఫెసర్ హార్డీ (G. H. Hardy, 7 February 1877 – 1 December 1947) టేక్సీ చేయించుకుని వెళ్ళేరుట. ఆ టేక్సీ మీద ఉన్న

1729 ని చూసి అది "చాల చప్పగా ఉన్న సంఖ్యలా అనిపించింది" అన్నారుట, హార్డీ. "అయ్యయ్యో! అది చప్పనైనదేమీ కాదు, చాల ఆసక్తికరమైన సంఖ్య. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం రెండు విధాలుగా రాయగలిగే సంఖ్యలన్నిటిలోను ఇది అతి చిన్నది" అని ఠక్కున సమాధానం ఇచ్చేరుట, రామానుజన్. ఈ గమనికని గణిత పరిభాషలో చెప్పవచ్చు: 1729 అనే సంఖ్య 1 నీ 12 నీ విడివిడిగా ఘనీకరించి ఆ లబ్దాలని కలిపినా వస్తుంది, లేదా 9 నీ 10 నీ విడివిడిగా ఘనీకరించి ఆ లబ్దాలని కలిపినా వస్తుంది. ఇదే విషయాన్ని గణిత సమీకరణం రూపంలో చెప్పాలంటే ఈ దిగువ చూపిన బొమ్మ 1.2 చూడండి.

$$1729 = 1^3 + 12^3 \text{ లేదా } 1729 = 10^3 + 9^3$$

అనగా

$$1729 = 1\star 1\star 1 + 12\star 12\star 12 = 10\star 10\star 10 + 9\star 9\star 9.$$

బొమ్మ 1.2. రెండు విధాలుగా 1729 ని రాయటం ఎలాగో చూపిస్తున్నాను. ఇక్కడ నక్షత్రం గుణకారానికి గుర్తు.

ఒకే అంశాన్ని (అంకెని కానీ, చలనరాసిని కానీ) రెండు సార్లు వేసి గుణిస్తే వచ్చిన దానిని వర్గు (square) అనీ, మూడు సార్లు వేసి గుణిస్తే వచ్చిన దానిని ఘనం (cube) అనీ అంటారు.

"అంకెలతో ఈ గారడీలు అన్నీ ఎలా చేయగలుగుతున్నావు?" అని ఎవరో రామానుజాన్ని అడిగితే, "నా ఇలవేలుపు నా చేత ఇలా పలికిస్తోంది" అన్నాడుట. పలికించేవాడు పలికిస్తూ ఉంటే పలికే పలుకుల్లో ప్రావీణ్యత ఉండక మరేమి ఉంటుంది? పైన చెప్పినటువంటి లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలని “టేక్సీ సంఖ్యలు” అని కొందరు, "రామానుజన్ సంఖ్యలు" అని కొందరు అంటారు. నిజానికి “రామానుజన్ సంఖ్యలు” అనే పేరుతో చెలామణీ అయేవి చాలా ఉన్నాయి; అవి అన్నీ అర్థం కావాలంటే గణితం అనే ఒక మహాసముద్రం లోనికి బాగా లోతుగా దిగాలి. అవసరం వెంబడి దిగవలసి వచ్చినప్పుడు దిగుదాం.

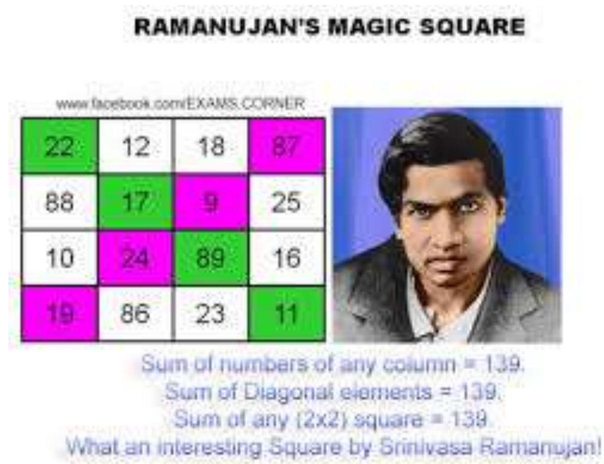
ఇటీవల పై సమస్యకి సంబంధించిన మరొక సమస్యని పరిష్కరించేరు. టేక్సీ సంఖ్యలలో అతి చిన్నది 1729 అయితే అతి పెద్దది ఏది? ఇప్పటివరకు మనకి తెలిసిన అతి పెద్ద టేక్సీ సంఖ్య 885623890831:

$$885623890831 = 7511^3 + 7730^3 \text{ లేదా } 8759^3 + 5978^3$$

లెక్క వేసి చూసుకొండి. కంప్యూటర్లు ఉపయోగించి ఇంత కంటె పెద్దవి ఉన్నాయేమో వెతక వచ్చు.

1.2 రామానుజన్ చదరం

మనందరికీ సులభంగా అర్థం అయ్యే మరొక కానుక – రామానుజన్ నుండి. దీనిని రామానుజన్ చదరం అంటారు (బొమ్మ 1.3 చూడండి).



బొమ్మ 1.3 రామానుజన్ చదరం

ఈ బొమ్మలొ ప్రతి అరుస (row లేదా అడ్డు వరుస) లో సంఖ్యలని కూడి చూడండి. ప్రతి సారి మొత్తం 139 వస్తోంది కదా. ఇప్పుడు ప్రతి నిరుస (column లేదా నిలువు వరుస) లో ఉన్న సంఖ్యలని కూడి చూడండి. ఈ మొత్తాలూ 139 తో సమానమే!

ఇప్పుడు ఏటవాలుగా ఉన్న రెండు కర్ణాల వెంబడీ ఉన్న సంఖ్యలని కూడదాం.

మొదటి కర్ణం: 22 + 17 + 89 + 11 = 139

రెండవ కర్ణం: 87 + 9 + 24 + 19 = 139

“అబ్బే! ఇందులో వింతేముంది? ఈ రకం చదరాలు ఇంతకు ముందు చూసేం” అని మీరు పెదవి విరచే లోగా మరికొన్ని విషయాలు చూడండి.

ఇప్పుడు నాలుగు మూలలో ఉన్న సంఖ్యలని కూడండి.

మూలలు: 22 + 89 + 19 + 11 = 139

ఇంకా కావాలా? ఏ ఉపచదరంలో సంఖ్యలని కూడినా 139 వస్తుంది.

మధ్య ఉపచదరం: 17 + 9 + 24 + 89 = 139

ఈశాన్య ఉపచదరం: 18 + 87 + 9 + 25 = 139

నైరుతి ఉపచదరం: 10 + 24 + 19 + 86 = 139

ఆగ్నేయ ఉపచదరం: 89 + 16 + 23 + 11 = 139

వాయవ్య ఉపచదరం: 22 + 12 + 88 + 17 = 139

మరి రెండు చదరాలు మిగిలిపోయాయి. అవేమిటో గుర్తుపట్టి చెప్పగలరా? ఈ చదరం ఉన్న కాగితాన్ని అడ్డుగా చుట్ట చుడితే పైనున్న రెండు గదులు, కిందనున్న రెండు గదులు కలిసి –

ఉత్తర–దక్షిణ ఉపచదరం: 12 + 18 + 86 + 23 = 139

ఇప్పుడు కాగితాన్ని నిలువుగా చుట్ట చుడితే ఎడమన రెండు గదులు, కుడిన ఉన్న రెండు గదులు కలిసి –

తూర్పు–పడమర ఉపచదరం: 88 + 23 + 12 + 18 = 139

ఈ అద్భుతం చాలనట్లు మరొక్క మహాద్భుతం ఈ చదరంలో దాగి ఉంది.

పై వరుసలో ఉన్న నాలుగు సంఖ్యలని మరొక సారి చూడండి. చూసి, ఇలా చదవండీ:

22–12–1887.

ఇది 22 డిసెంబర్ 1887 – శ్రీనివాస రామానుజన్ జన్మ దినం!

1.3 రామానుజన్ మేధ పని చేసే తీరు?

ఈ ఉపోద్ఘాతం ముగించే లోగా రామానుజన్ వంటి మహా మేధావి మేధ ఎలా పని చేస్తూ ఉండుంటుందో ఊహిద్దాం.
ఉదాహరణకి 3 అనే అంకెని ఇచ్చి దీనిని మరొక విధంగా రాయమని అడిగేమనుకుందాం. ఎవరినైనా అడిగి చూడండి. మూడొంతులు ఈ దిగువ ఇచ్చిన సమాధానాలలో ఏదో ఒకటి రావచ్చు:

3 = 1 + 1 + 1

3 = 2 + 1

కాని ఎవ్వరైనా ఈ దిగువ ఇచ్చిన సమాధానం ఇస్తే కొంచెం కొత్త దారిలో వెళుతూన్న వ్యక్తిలా కనిపిస్తాడు:

$3 = \sqrt{9}$

ఇప్పుడు వర్గమూలం కింద ఉన్న 9 ని 1 + 8 అని రాసి, ఆ 8 ని 2★4 రాయొచ్చు కదా! (ఇక్కడ నక్షత్రాన్ని గుణకారానికి గుర్తుగా వాడుతున్నాను.)

$3 = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{1 + 2 * 4}$

ఇప్పుడు ఈ 2★4 లో ఉన్న 4 ని 16 యొక్క వర్గమూలంగా రాయవచ్చు కదా.

$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{16}}$

ఇప్పుడు ఇంతవరకు చేసిన పనిని పదే పదే చేసుకుంటూ పోదాం. అనగా, ముందు 16 ని 1 + 15 అని రాయడం, ఆ 15 ని 3★5 అని తిరగ రాయడం.

$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 15}} = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * 5}}$

ఇప్పుడు ఈ 3★5 లో ఉన్న 5 ని 25 యొక్క వర్గమూలంగా రాయవచ్చు కదా. కనుక

$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * \sqrt{25}}}$

$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * \sqrt{1 + 24}}}$

ఇప్పుడు 24 ని 4★6 గా రాసి, ఈ 4★6 లో ఉన్న 6 ని 36 యొక్క వర్గమూలంగా రాయవచ్చు కదా. కనుక

$$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * \sqrt{1 + 4 * 6}}} = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * \sqrt{1 + 4 * \sqrt{36....}}}}$$

$$3 = \sqrt{1 + 2 * \sqrt{1 + 3 * \sqrt{1 + 4 * \sqrt{1 + 5 * ....}}}}$$

ఇలా ఎంత దూరమైనా పోవచ్చు. ఎంత దూరం వెళ్లినా పైన రాసిన సమీకరణం చెల్లుతుందని ఋజువు చెయ్యవచ్చు. ప్రయతించి చూస్తారా?

$$n = \sqrt{1 + (n - 1) * (n + 1)}$$

తో మొదలు పెట్టి మీ మెదడుకి పని కల్పించండి!

చూసేరా! మన 3 ని 3 లా వదిలెయ్యకుండా మరొక విధంగా రాయాలనే కోరిక మనలో ఎంతమందికి పుడుతుంది?

ఆలోచించండి!

2. సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణ సంఖ్యలు

రామానుజన్ కి ప్రతి సంఖ్యా ప్రియమిత్రుడే. అందుకని సంఖ్యలతో మొదలు పెడతాను. తెలుగులో అంకెలు, సంఖ్యలు అన్న రెండు మాటలు ఉండటం ఉన్నాయి కాని, వీటి వాడకంలో అంతగా నిర్ధిష్టత ఉన్నట్లు తోచదు. సున్న నుండి తొమ్మిది వరకు ఉన్న వాటిని అంకెలు అనాలనీ, ఆ పై వాటిని సంఖ్యలు అనాలనీ ఒక నియమం ఉండటం ఉంది కాని, అన్ని నియమాలలాగే ఈ నియమాన్ని అప్పుడప్పుడు ఉల్లంఘించక తప్పదు. మరొక కోణం నుండి చెప్పాలంటే ఇంగ్లీషులో "నూమరల్" (numeral) అనే మాటని అంకె అనీ, "నంబర్" (number) అనే మాటని సంఖ్య అనీ తెలిగించ వచ్చు.

సంఖ్యలకి రాతలో వేసే గురుతులే "అంకెలు" అనే నిర్వచనం మరొకటి ఉందిట. ఈ లెక్కని రోమన్ అంకెలు, గ్రీకు అంకెలు, హిందూ అంకెలు మొదలైనవి సంఖ్యలకి వాడే రకరకాల గుర్తులు.

మన సంస్కృతిలో "సాంఖ్య" అనే మరొక పదం ఉంది. సంస్కృత భాషలోని "సాంఖ్య" కీ లేటిన్ భాష లోని "సియంటియా" కి కొంత పోలిక ఉంది. ఈ "సియంటియా" నుండే "సైన్సు" అనే ఇంగ్లీషు మాట పుట్టింది కనుక "సైన్స్" అన్న మాటని "సాంఖ్యం" అని తెలిగించవచ్చు. సంస్కృతం లో "సాంఖ్య" అంటే జ్ఞానం. ఈ దృష్టితో చూస్తే సంఖ్యలు మన జ్ఞానానికి గుర్తులు అని వ్యాఖ్యానం చేస్తే చెయ్య వచ్చు.

మన మనుగడకి భాష నేర్పరితనం ఎంత ముఖ్యమో లెక్కలలో నేర్పరితనం కూడ అంతే ముఖ్యం. మనం ఏ విషయమైనా ఆలోచించేటప్పుడు ఆ ఆలోచనకి రూపం దిద్దటానికి మన మనోఫలకం మీద మాటలు పేర్చి చూసుకుంటాం. అదే విధంగా ఏదైనా నిశ్చయం చెయ్యవలసి వచ్చినప్పుడు, అసంకల్పంగానైనా సరే, ఆ నిశ్చయం చెయ్యటం వల్ల కలిగే లాభనష్టాలు ఏమిటో మనస్సులో లెక్కకట్టి, బేరీజు వేసి చూసుకుంటాం.

నేను ఇలా అన్నానని ఆదిమ మానవుడు బీజగణితం (algebra), గణాంకశాస్త్రం (statistics), కలన గణితం (calculus), మొదలైన గణిత శాస్త్రాలు వాడేడని మనం అనుకోనక్కర లేదు. రెండు

వస్తువులని చూపిస్తే ఏది పెద్దదో చెప్పగలగటం, కైవారాన్ని బట్టి వస్తువులని ఒక క్రమంలో అమర్చటం, పెంపుడు జంతువులని లెక్కపెట్టి చూసుకోవటం, ఆస్తులు పంచుకోవటం, మొదలైన చర్యలు బతుకుకి నిత్యావసరాలు కదా. ఈ రకం గణన పద్ధతులనే మనం అంకగణితం (arithmetic) అంటాం.

లెక్క పెట్టటం సంగతే చూద్దాం. లెక్క పెట్టటానికి 'అంకె' అనే పరిజ్ఞానం కావాలి. ఈ అంకె అనే భావాన్ని బహిర్గతం చెయ్యటానికి ఒక మాట కావాలి. ఈ మాటని రాయటానికి ఒక సంకేతం కావాలి. ఈ మాటలే ఒకటి, రెండు, మూడు,.., మొదలైనవి. ఈ సంకేతాలు 1, 2, 3, ..., మొదలగునవి. భాషని బట్టి మాట మారుతుంది. దేశ, కాల, పరిస్థితులకి అనుకూలంగా సంకేతాలు మారతాయి. కాని భావం ఒకటే.

ఇప్పుడు, ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఎక్కువ వాడుకలో ఉన్న సంకేతాలు 1, 2, 3, ..., మొదలైనవి కనుక ఇక్కడ వీటినే వాడదాం. ఈ అంకెలు, సంఖ్యలు, చూడటానికి ఒకేలా కనిపించినా, వీటిల్లో ఎన్నో సూక్ష్మమైన మెలికలు ఉన్నాయి. మనుష్యులంతా చూడటానికి ఒకేలా కనిపించినా, పరిశీలించి చూస్తే వారిలో ఎన్నెన్ని తేడాలు ఉన్నాయో! మనిషిని ముమ్మూర్తులా పోలిన మరొక మనిషి దొరకటం దుర్లభం. అలాగే అంకెలలో కూడ రకరకాల అంకెలు ఉన్నాయి. అవేమిటో చూద్దాం.

2.1 సహజ సంఖ్యలు (Natural Numbers)

చరిత్రని దృష్టిలో పెట్టుకు చూస్తే మొట్టమొదట లెక్క పెట్టుకోటానికి పనికొచ్చే అంకెలు మనకి తారసపడి ఉంటాయి. వీటిని మనం 1, 2, 3,..., అని రాస్తాం. గణిత పరిభాషలో చెప్పాలంటే – ఒకటి నుండి మొదలు పెట్టి 1, 2, 3,... అనుకుంటూ, అలా లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలని "సహజ సంఖ్యలు" అంటారు. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే, 1, 2, 3, 4, 5, 6,......అలా విసుగు, విరామం లేకుండా లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే వచ్చే అనుక్రమం (sequence) లోని సంఖ్యలే సహజ సంఖ్యలు (natural numbers). ఈ సహజ సంఖ్యలనే లెక్కింపు సంఖ్యలు లేదా గణన సంఖ్యలు (counting numbers) అని కూడ అంటారు.

ఈ సహజ సంఖ్యల లక్షణాలు చూద్దాం. రెండు సహజ సంఖ్యలని కూడగా వచ్చే మొత్తం మరొక సహజ సంఖ్య అయి తీరుతుంది. ఉదాహరణకి 3 నీ 5 నీ కూడితే 8 వస్తుంది. ఇక్కడ 3, 5 సహజ సంఖ్యలు, వాటి మొత్తం కూడ సహజ సంఖ్యే! గణితశాస్త్ర వేత్తలకి ఈ రకం లక్షణం అంటే ఎంతో ఇష్టం. ఇది ఎందుకో చూద్దాం. ఇద్దరు మనుష్యులు కలుసుకుని పెళ్లి చేసుకున్నారని అనుకుందాం. ఈ కలయిక వల్ల వారికో పిల్ల పుడితే, ఆ పిల్ల మనిషి పిల్లయితే అది సహజంగా ఉంటుంది. వాళ్లకి ఏ కుక్క పిల్లో పుడితే అది అసహజం. అదే విధంగా రెండు సహజ సంఖ్యలని కలిపినప్పుడు మరొక సహజ సంఖ్య వస్తే 'అది సహజం,' అని గమనించి, సంతృప్తిపడతారు – లెక్కల ప్రపంచంలో విహరించే వ్యక్తులు. కనుక ఈ లక్షణం గణితంలో చాల ముఖ్యమైనది. ముఖ్యమైన లక్షణం కనబడ్డప్పుడు దానికో పేరు పెడితే బాగుంటుంది కదా. ఈ లక్షణాన్ని ఇంగ్లీషులో "క్లోషర్" (closure) అంటారు. దీన్ని మనం తెలుగులో "సంవృతం" అందాం. ఒక భావాన్ని ఒక మాటతో ముడి పెట్టేము కనుక ఇప్పుడు మనం గమనించిన భావాన్ని ఒక సూత్రంలా ప్రవచించవచ్చు: "సంకలనం చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం ప్రదర్శిస్తాయి." (Natural numbers are closed under addition.) అంటే, రెండు సహజ సంఖ్యలని కలిపినప్పుడు వచ్చే సమాధానం కూడ సహజ సంఖ్యే!

పై సూత్రం చదవగానే కొంచెం, వీసమెత్తు, కుతూహలం ఉన్న వ్యక్తికి చిన్న సందేహం వస్తుంది: వ్యవకలనం లేదా తీసివేతలు చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం చూపుతాయా? ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం వెతకటం కష్టం కాదు. ఉదాహరణకి 7 లోంచి 5 తీసివేస్తే 2 వచ్చింది. ఇక్కడ 7, 5, 2 సహజ సంఖ్యలే. కాని 5 లోంచి 7 తీసివేస్తే ఋణ సంఖ్య వచ్చింది. (ఋణ సంఖ్య అంటే ఏమిటో రాబోయే పేరాలో చెబుతాను.) ఈ ఋణ సంఖ్యని రాసేటప్పుడు – 2 అని రాస్తాం. ఈ – 2 సహజ సంఖ్యల జాబితాలో లేదు. మరొక ఉదాహరణ. సహజ సంఖ్య అయిన 5 లోంచి మరొక 5 తీసివేస్తే 0 వచ్చింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో మనకి తారసపడ్డ 0, – 2 సహజ సంఖ్యలు కావు; నిర్వచనం ప్రకారం సహజ సంఖ్యలు 1 తో మొదలవుతాయి. అంటే, నిర్వచనం ప్రకారం ధన పూర్ణ సంఖ్యలే సహజ సంఖ్యలు; ఋణ సంఖ్యలు, సున్న సహజ సంఖ్యలు కావు. కనుక వ్యవకలనం చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలకి సంవృత లక్షణం లేదు.

సంఖ్యలన్న తరువాత వాటితో కనీసం కూడికలు, తీసివేతలు చెయ్యలేకపోతే వాటి ప్రయోజనం ఏమిటి? నెత్తిమీద పెట్టుకుని ఊరేగటానికా? మన దైనందిన వ్యవహారాలకి సహజసంఖ్యలు ఒక్కటీ ఉంటే సరిపోవు; వాటితో పాటు, సున్న, ఋణ సంఖ్యలు కూడ ఉండాలి. అందుకని ధన పూర్ణాంకాలని, సున్నని, ఋణ పూర్ణాంకాలనీ గుత్త గుచ్చి వాటికి పూర్ణాంకాలు (integers or whole numbers) అని పేరు పెట్టి పిలవమన్నారు. మనం అలాగే పిలుస్తున్నాం. మన అవసరాలకి సహజ సంఖ్యల కంటె పూర్ణాంకాలు (లేదా, పూర్ణ సంఖ్యలు) మెరుగన్నారు. ఇక్కడ గమనించవలసినది ఏమిటంటే పూర్ణ సంఖ్యలలో ఒక భాగం పేరు సహజ సంఖ్యలు.

2.2 ధన, ఋణ సంఖ్యలు (Positive and Negative Numbers)

లెక్కపెట్టేటప్పుడు సున్న నుండి "ముందుకి" వెళితే వచ్చేవి ధన సంఖ్యలు అనిన్నీ, "వెనక్కి" వెళితే వచ్చేవి ఋణ సంఖ్యలు అనిన్నీ అంటారు. మనకి వచ్చే జీతపు రాళ్లు 10 అయితే దాన్ని 'ధన 10' అని కాని, 'ప్లస్ 10' అని కాని, '+10' అని కాని అంటాం. అదే విధంగా మనకి పది రూపాయలు అప్పు ఉంటే దాన్ని 'ఋణ 10' అని కాని, 'మైనస్ 10' అని కాని. '–10' అని కాని అనాలి. కనుక 'ధన,' 'ఋణ' అనే భావాలు లేదా 'ఆదాయం,' 'వ్యయం' అనే భావాలు చర్చించ వలసిన సమయాల్లో సహజ సంఖ్యలు అనే భావం సరిపోదు; పూర్ణాంకాలు (లేదా, పూర్ణసంఖ్యలు) అనే కొత్త భావం అవసరం వస్తుంది.

2.3 పూర్ణాంకాలు లేదా పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers)

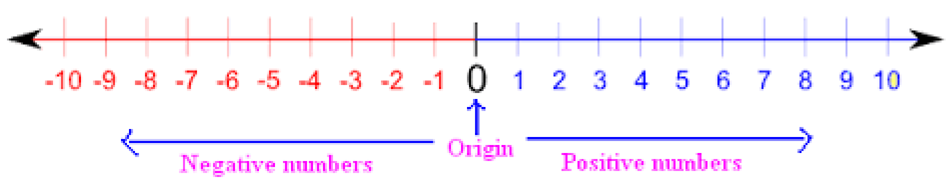
సున్న నుండి మొదలు పెట్టి అలా ముందుకి లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే నిర్విరామంగా వచ్చే 0, 1, 2, 3, ... వంటి ధన సంఖ్యలు, వెనక్కి పోతే వచ్చే –1, –2, –3, ... వంటి ఋణ సంఖ్యలూ, అన్నింటిని కలిపి పూర్ణ సంఖ్యలు (integers) అని అంటారు. కనుక ....–3, –2, –1, 0, 1, 2,3,... వగైరాలన్నీ పూర్ణాంకాలు. వీటిల్లో –1, –2, –3,... వగైరాలు ఋణ పూర్ణాంకాలు; సున్న (0) ని కూడ

ధన పూర్ణాంకం అనడం ఆనవాయితీగా వస్తూన్న ఆచారం కనుక 0,1, 2, 3, ... వగైరాలు ధన పూర్ణాంకాలు.

ఇప్పుడు మనం ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యలని తీసుకుని కలిపినా, తీసివేసినా, హెచ్చవేసినా వచ్చే సమాధానం మరొక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. మచ్చుకి 5 కి 2 ని కలపగా వచ్చిన 7 మరొక పూర్ణ సంఖ్య; 2 నుండి 5 ని తీసివెయ్యగా వచ్చిన −3 కూడ పూర్ణ సంఖ్యే; 5 ని 2 చేత గుణించగా వచ్చిన 10 కూడ పూర్ణ సంఖ్యే. అంటే, సంకలన, వ్యవకలన, గుణకారాలు చేసేటప్పుడు పూర్ణ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణాన్ని ప్రదర్శిస్తాయి.

కూడికలు, తీసివేతలు, హెచ్చవేతలేనా మనం చేసే గణిత ప్రక్రియలు? ఆస్తుల పంపకాల సమయంలో భాగారాలు కూడ చెయ్యాలి కదా. ఉదాహరణకి −34 ని 2 చేత భాగించినప్పుడు −17 వచ్చింది. ఇందులో ఇబ్బందేమీ లేదు; ఒక పూర్ణ సంఖ్యని మరొక పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించినప్పుడు మరొక పూర్ణ సంఖ్య సమాధానంగా వచ్చింది. కాని ఈ −17 ని మళ్లా 2 చేత భాగిస్తే సమాధానంగా పూర్ణ సంఖ్య రాలేదు. కనుక భాగారాలు చేసేటప్పుడు పూర్ణసంఖ్యలు సంవృతాలు కావు. ఈ ఇబ్బంది నుండి గట్టెక్కాలంటే మనం మరొక రకం సంఖ్యలని సృష్టించుకోవాలి. అవే భిన్న సంఖ్యలు లేదా భిన్నాలు. వీటి సంగతి తరువాత చూద్దాం.

సహజ సంఖ్యలని, పూర్ణ సంఖ్యలని సంఖ్యా రేఖ (number line) మీద చుక్కలు వేసి చూపవచ్చు (బొమ్మ 2.1 చూడండి). ఈ సంఖ్యా రేఖ తరచు వాడుతాము కాబట్టి దీనితో పరిచయం పెంచుకోవడం మంచిది.



బొమ్మ 2.1 సంఖ్యా రేఖ మీద పూర్ణ సంఖ్యల ఉనికి.

3. నిష్ప, అనిష్ప, లోకోత్తర సంఖ్యలు

భిన్నాన్ని ఇంగ్లీషులో `ఫ్రేక్షన్` (fraction) అంటారు. తెలుగులో కాని, సంస్కృతంలో కాని `భిన్నం` అంటే 'మామూలుగా కాకుండా మరొక విధంగా' అని అర్థం; `భాగం` అనే సూచనే లేదు. కాని ఇంగ్లీషులో మాత్రం `ఫ్రేక్షన్` అంటే భాగం అనే అర్థం. తెలుగులో "భిన్నాలు" అంటే "మరొక రకమైన సంఖ్యలు" అనే అర్థం స్ఫురిస్తుంది కాని ఇక్కడ మనం "భాగం" అనే అర్థాన్నే తీసుకుందాం. ఏది ఏమయినా భిన్నం అంటే మనందరికీ తెలుసు కనుక ప్రత్యేకంగా ప్రయాస పడి నిర్వచనం చెప్పను.

భిన్నాలని ఎవరు ఎప్పుడు కనుక్కున్నారో ఎవ్వరికీ తెలియదు. కాని `భిన్నం` అనగా భాగం' అనే భావన మానవుడి పుర్రెలో పుట్టినదే; అంటే, ఇది సహజమైన భావం కాదు, కల్పితమైన భావం. క్రీస్తు పూర్వం 1650 ప్రాంతాలదైన `రిండ్ పపైరస్' (Rhind papyrus) లో 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 వంటి ఏకలవ భిన్నాలకి (అంటే లవంలో 1 ఉన్న భిన్నాలు), 2/3 కి ప్రత్యేకమైన మాటలు కనిపిస్తాయి. మన తెలుగులో కూడ చూడండి, 1/2 ని అర అనీ, 1/4 ని పావు అనీ అంటాం. మూడు పావులు అని చెప్పాలంటే సంధి చేసి ముప్పావు అంటాం. తెలుగులో, నాకు తెలుసున్నంత వరకు, 2/3 కి గానీ, తదితర భిన్నాలకి గాని ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నట్లు లేదు. ముప్పేట అంటే 3/4 అనే అర్థం వస్తుంది, కాని ఈ మాట కొబ్బరి కాయ ఎంత ముదిరిందో చెప్పడానికే వాడటం చూసేను.

3.1 నిష్ప సంఖ్యలు (Rational Numbers)

పూర్ణ సంఖ్యలని, భిన్న సంఖ్యలని గుత్తగుచ్చి వాటికి నిష్ప సంఖ్యలు అని ఒక కొత్త పేరు పెడదాం. `నిష్ప సంఖ్యలు` అంటే లవము, హారము ఉండి నిష్పత్తి ని తెలియజేసేవి. ఇక్కడ ఇలా కొత్త పేరు పెట్టడంలో విజ్ఞత తరువాత అర్థం అవుతుంది. ఈ నిష్ప సంఖ్యలనే ఇంగ్లీషులో 'రేషనల్ నంబర్స్' (rational numbers) అంటారు – అంటే 'రేషో' (ratio) లేదా నిష్పత్తిని సూచించేవి. ('రేషనల్' అన్న ఇంగ్లీషు మాటకి రెండు అర్థాలు ఉన్నాయి: ఒకటి, తర్కబద్ధమైన అనిన్నీ, మరొకటి నిష్పత్తిని సూచించేది అనిన్నీ.) నిష్ప సంఖ్యలని ఉపయోగించి మనం కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు,

భాగారాలు చేసినప్పుడు వచ్చే సమాధానం ఎల్లప్పుడూ నిష్ప సంఖ్యే అవుతుంది. అంటే అంకగణితం (arithmetic) చేసేటప్పుడు నిష్ప సంఖ్యలు సంవృతాలు. (Rational numbers are closed under arithmetic operations). అందుకనే నిష్ప సంఖ్యల గురించి మనం ఎంత నేర్చుకుంటే అంత మంచిది.

ఈ ఆధునిక యుగంలో అంకగణితం ఒక్కటీ చెయ్యడం వస్తే సరిపోదని ఏ ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థిని అడిగినా తెలుస్తుంది. మన ప్రగతికి బీజగణితం (algebra) ఎంతో ముఖ్యం. బీజగణితంలో వర్గమూలం (square root) విలువ కట్టడం ఒక సర్వసాధారణమైన ప్రక్రియ. ఉదాహరణకి 2 యొక్క వర్గమూలం ఉరమరగా 1.414. ఉరమరిక లేకుండా నిక్కచ్చిగా రాయాలంటే 1 వేసి, దాని పక్క దశాంశ బిందువు పెట్టి, అటు తరువాత నిర్విరామంగా అలా అంతులేనన్ని అంకెలని వేసుకుంటూ పోవాలి. ఇటువంటి సంఖ్యలని ఏ రెండు పూర్ణాంకాల నిష్పత్తిలాగా రాయలేము. అంటే, వాటిని భిన్నాలుగా, లేదా నిష్ప సంఖ్యలుగా, రాయలేము. అంటే ఏమిటన్న మాట? మన 2 యొక్క వర్గమూలం పూర్ణ సంఖ్య కాదు, భిన్న సంఖ్య (లేదా నిష్ప సంఖ్య) కాదు. ఇదేదో కొత్త రకం సంఖ్య. బీజగణితంలో ఈ కొత్త రకం సంఖ్యలు కొల్లలుగా కనిపిస్తాయి. కనుక బీజగణితం చేసేటప్పుడు నిష్ప సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం ప్రదర్శించటం లేదన్నమాట. సంవృతత్త్వం కావాలంటే సంఖ్యల పరిధిని మరికొంచెం పెంచాలి. ఈ పరిధిని పెంచటానికి కావలసిన కొత్త రకం సంఖ్యలని అనిష్ప సంఖ్యలు (irrational numbers) అంటారు. అంటే, "రేషనల్" కానివి. అంటే, నిష్పత్తిలా రాయటానికి లొంగనివి.

3.2 అనిష్ప సంఖ్యలు (Irrational Numbers)

అనిష్ప సంఖ్య అనే భావం మన అనుభవ పరిధికి అతీతమైనది. వీటిని ఇంగ్లీషులో `ఇర్రేషనల్` (irrational) సంఖ్యలు అంటారు. `రేషనల్` కానివి `ఇర్రేషనల్.` ఇక్కడ ఈ `రేషనల్` అన్న మాట `రేషో` (ratio) అన్న మాటకి సంబంధించినది. ఒక నిష్పత్తి రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలు నిష్ప సంఖ్యలు (rational numbers). ఒక సంఖ్యని నిష్పత్తి రూపంలో రాయలేని పక్షంలో ఆ సంఖ్య

అనిష్ప సంఖ్య (irrational number). పూర్ణ సంఖ్యలు కానివి, నిష్ప సంఖ్యలు కానివి అయిన సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం యవనులకి అవగతం అయేసరికి వారి ఆశ్చర్యానికి అంతు లేదు.

తెలుగు అకాడమీ వారి పదకోశంలో 'అకరణీయ' అంటే రేషనల్ అనిన్నీ, 'కరణీయ' అంటే ఇర్రేషనల్ అనిన్నీ ఉంది. ఈ ప్రయోగాలు నాకు రుచించలేదు. మొదటి అభ్యంతరం: అకరణీయ అంటే 'ఇర్రేషనల్ కానిది రేషనల్' అన్న తిరకాసు నిర్వచనంలా అనిపించింది. 'అబద్ధం కానిది నిజం' అని నిజానికి నిర్వచనం చెప్పినట్లు అనిపించింది. ఉత్తరోత్తర్యా తెలుగు లోంచి ఇంగ్లీషులోకి వెళ్లవలసి వచ్చినప్పుడు 'అకరణీయ' లో 'అ' ని చూసి ఇది 'ఇర్రేషనల్' అనుకునే ప్రమాదం ఉంది. రెండవ అభ్యంతరం: ఈ 'కరణ' శబ్దానికి మూలం ఏమిటో తెలియకపోవడం వల్ల ఈ ప్రయోగం స్వయంబోధకంగా లేదనిపించింది. తెలుగు అకాడమీ వారి పదకోశంలో మరొక చోట 'రేషనల్' అంటే 'సయుక్తిక' అనిన్నీ, 'ఇర్రేషనల్' అంటే 'యుక్తి విరుద్ధమైన' అనిన్నీ ఉన్నాయి. ఇదీ నాకు రుచించలేదు. అందుకని నిష్ప సంఖ్యలు, అనిష్ప సంఖ్యలు అనే కొత్త ప్రయోగం చేసి చూస్తున్నాను.

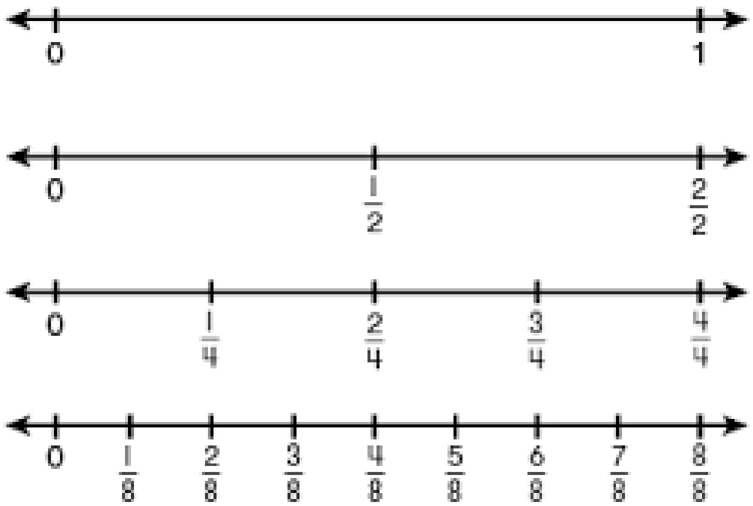
అనిష్ప సంఖ్యల అవసరం మన దైనందిన వ్యవహారాలలో ఎలా వస్తుందో చూపిస్తాను. ఒక చతురస్రంలో కర్ణం యొక్క పొడుగుని లెక్క కట్టాలంటే భుజం పొడుగుని ఏ నిష్ప సంఖ్యతో గుణించినా సరి అయిన సమాధానం రాదని పైథోగరోస్ కనుక్కున్నాడు. ఇదే విషయం మరొక విధంగా చెపుతా. ఒక చతురస్రంలో కర్ణం పొడుగుకి, భుజం పొడుగుకి మధ్య ఉండే సంబంధాన్ని రెండు పూర్ణ సంఖ్యల నిష్పత్తితో వ్యక్త పరచ లేము. మన చతురస్రం యొక్క భుజం పొడుగు ఒక అంగుళం అనుకుంటే, పైథోగరోస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, కర్ణం పొడుగు $\sqrt{2}$ (అంటే 2 యొక్క వర్గమూలం) అంగుళాలు. కనుక $\sqrt{2}$ అనిష్ప సంఖ్యకి ఒక ఉదాహరణ. పైథోగరోస్ కి అనిష్ప సంఖ్యకి మధ్య ఉన్న బాదరాయణ సంబంధాన్ని పురస్కరించుకుని $\sqrt{2}$ కి "పైథోగరోస్ సంఖ్య" అని పేరు పెట్టేరు.

అనిష్ప సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం మొట్టమొదట పైథోగరోస్ మనోవీధిలోనే మెరిసి ఉండుంటుందని కొందరి సిద్ధాంతం. ఇది నిజమో కాదో ఇతమిద్ధంగా మనకే కాదు, ఎవ్వరికీ

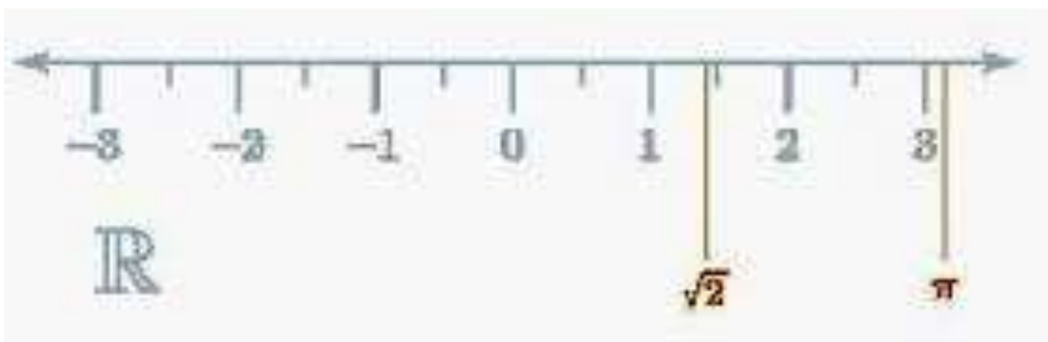
తెలియదు. ఎందుకంటే బాబిలోనియా లోని మట్టి పలకల మీద చూపిన ఒక లెక్కలో $\sqrt{2}$ యొక్క విలువ 14 దశాంశ స్థానాల వరకు తప్పు లేకుండా లెక్క కట్టబడి ఉంది. కాని పైథోగరోస్ శిష్యులు తమ కూటమే ఈ ఘన విజయం మొట్టమొదటగా సాధించిందన్న అపోహతో శత వృషభ శిరచ్ఛేద యాగం చేసేరని ఒక ఐతిహ్యం ఉంది.

ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళం చొప్పున ఉన్న (సమబాహు) చతుర్భుజి యొక్క కర్ణం $\sqrt{2}$ అయినట్లే, ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళం చొప్పున ఉన్న (సమబాహు) పంచభుజి యొక్క కర్ణం కూడా అనిష్ప సంఖ్యే. దీనిని ముద్దుగా సువర్ణ నిష్పత్తి (golden ratio) అని పిలుస్తారు. దీని విలువ $(1 + \sqrt{5})/2$. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పొడుగు వెడల్పులకి మధ్య ఉండే నిష్పత్తి ఈ సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉంటే ఆ దీర్ఘ చతురస్రం కంటికి ఎంతో ఇంపుగా కనిపిస్తుందని చిత్రకారులు అంటారు. మనుష్యుల ముఖాలు కొంచెం పరిశీలించి చూడండి. అవి గుండ్రంగా చంద్రబింబాన్ని పోలి ఉంటే చలివిడి ముద్దలాగో, బోర్లించిన సిబ్బిలాగో ఉందంటాం. కోలగా పొడుగ్గా ఉంటే గజం బద్దలా ఉందంటాం. ముఖం పొడవు, వెడల్పు మధ్య ఉండే నిష్పత్తి సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు ఆ ముఖం అందంగా కనిపిస్తుందిట.

నిష్ప సంఖ్యలని, అనిష్ప సంఖ్యలని కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద చూపించవచ్చు. బొమ్మ 3.1, బొమ్మ 3.2 చూడండి



బొమ్మ 3.1 సంఖ్యా రేఖ మీద నిష్ప సంఖ్యలకి చోటు ఉంది.



బొమ్మ 3.2 సంఖ్యా రేఖ మీద అనిష్ప సంఖ్యలకి కూడ చోటు ఉంది.

3.3 లోకోత్తర సంఖ్యలు (Transcendental Numbers)

అనిష్ప సంఖ్యల ఉనికి బీజ సమీకరణాలు (algebraic equations) పరిష్కరిస్తూన్న సందర్భంలో అవగతం అవుతాయి. ఒక సమీకరణం బీజ సమీకరణం కాని సందర్భాలలో మరొక రకం సంఖ్యలు ఎదురవుతాయి. వీటిని లోకోత్తర సంఖ్యలు అని అందాం. ఈ జాతికి చెందిన సంఖ్యకి ఉదాహరణ π (పై). ఒక వృత్తంలో పరిధి పొడుగుని వ్యాసం పొడుగు చేత భాగిస్తే ఆ భాగారం ఎంతసేపు చేసినా తెగదు. అందుకని ఆ భాగఫలానికి ప్రత్యేకించి ఒక పేరు కేటాయించేరు. ఆ పేరే "పై." ఈ π అనిష్ప

సంఖ్య జాతికి చెందదని పెద్దలు తీర్మానించి, ఈ జాతి సంఖ్యలని లోకోత్తర లేదా అనుభవాతీత లేదా బీజాతీత సంఖ్యలు అనమని చెప్పేరు. ఈ π రామానుజన్ ప్రీతిపాత్రమైన సంఖ్యలలో ఒకటి. ఈ π విలువ 39 దశాంశ స్థానాల వరకు

π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 420....

సహజ సంవర్గమానం (natural logarithm) కి మూలమైన నేపియర్ సంఖ్య e కూడ లోకోత్తర సంఖ్యే. ఈ e విలువ 26 దశాంశ స్థానాల వరకు

e = 2. 71828 18284 59045 23536 02874 ....

4. అనంతాలు (Infinities)

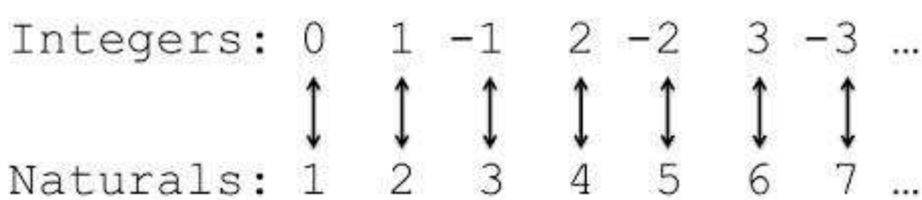
నిజ సంఖ్యలన్నింటిని ఒక సరళ రేఖ మీద బిందువులుగా ఊహించుకోవచ్చని తెలుసుకున్నాం కదా! అనగా, ఒక సరళరేఖ మీద, ఒక వరుస క్రమంలో అమర్చగలిగిన సంఖ్యలని నిజ సంఖ్యలు అని నిర్వచించవచ్చు. అప్పుడు ఈ సరళరేఖని 'నిజ రేఖ' (real line) అని పిలుస్తారు. ఈ నిజ రేఖ స్వరూప స్వభావాలు మరొక సారి పునశ్చరణ చేసుకుందాం. ఒక కాగితం మీద తిన్నని గీత గీసి, దాని మధ్యలో ఒక చుక్క పెట్టి, దానిని 'సున్న' అని పిలవండి. ఆ సున్నకి, కుడి పక్కన, ఒక అంగుళం దూరంలో మరొక చుక్క పెట్టి దానిని 'ఒకటి' అని పిలవండి. అలా నిర్విరామంగా అంగుళమేసి వ్యవధులలో 2, 3, 4,.... అనుకుంటూ చుక్కలు పెట్టండి. ఇదే విధంగా సున్నకి ఎడమ పక్కన −1, −2, −3, అనుకుంటూ వెళ్లండి. ఇప్పుడు ఇదే రేఖ మీద భిన్నాలన్నిటినీ (నిష్ప సంఖ్యలని) కూడ వేసి గుర్తించవచ్చు కాని, వీటన్నిటికీ కాగితం మీద చూపటం కష్టం కనుక మచ్చుకి బొమ్మలో కొన్నే చూపిస్తారు. ఇదే రేఖ మీద అనిష్ప సంఖ్యలు ఎక్కడ ఉంటాయో ఉరమరగా చూపించవచ్చు. ఇక్కడ గమనించవలసినది ఏమిటంటే గీత మీద నిజ సంఖ్యలన్నిటికీ స్థావరం ఉంది. దీనినే తిరకాసుగా చెప్పాలంటే నిజ రేఖ మీద ఉండే బిందువులన్నీ ఏదో ఒక నిజ సంఖ్యకి స్థావరం.

ఈ నిజ రేఖ మీద ఉన్న అనంతమైనన్ని (infinite) బిందువులలో అతి కొద్ది బిందువులే సహజ సంఖ్యలకి స్థావరాలు. వాటినే మనం "1, 2, 3,...," అని పిలుస్తున్నాం. ఇక్కడ 3 తరువాత మూడు చుక్కలు పెట్టడంలో అర్థం ఏమిటంటే ఈ సహజ సంఖ్యలు అవిరామంగా అలా వస్తూనే ఉంటాయని చెప్పడానికి! అంటే, ఆ గీత మీద ఎంత దూరం ప్రయాణం చేసినా సహజ సంఖ్యలు, అంతు లేకుండా, అలా వస్తూనే ఉంటాయి. ఈ "అంతు లేని తనం" అనే భావాన్ని అనంతం (infinity) అంటారు. అంటే, అనంతం అనేది కేవలం ఒక భావం. అది 1, 2, 3, లాంటి అంకె కాదు. అనంతం అంకె కాదు కనుక దానితో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు చెయ్యలేము. గణితంలో శూన్యం అన్న భావానికి '0' అనే గుర్తు ఉన్నట్లే, ఈ 'అనంతం' అనే భావానికి ∞(పదుక్కోబెట్టిన 8) అనే గుర్తుని వాడతారు. కాని 0 (సున్న) కీ ∞ (అనంతానికి) ఒక ముఖ్యమైన తేడా ఉంది. అన్ని అంకెలలాంటిదే "సున్న" అనే అంకె; దానితో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు చెయ్యవచ్చు. సున్నతో భాగారం

చెయ్యడానికి వీలు పడదు. ఇదే ధోరణిలో, ∞ (అనంతం) తో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు చెయ్యడం కుదరదు; ఎందుకంటే ∞ ఒక సంఖ్య కాదు. కాని శాస్త్రంలో సున్న ఎంత తరచుగా వస్తుందో అనంతం కూడ అంత తరచుగా వస్తూ ఉంటుంది. కనుక అనంతంతో "వేగడం" నేర్చుకోవాలి, లేకపోతే రోజు గడవదు.

4.1 అనంతంతో ప్రయోగాలు

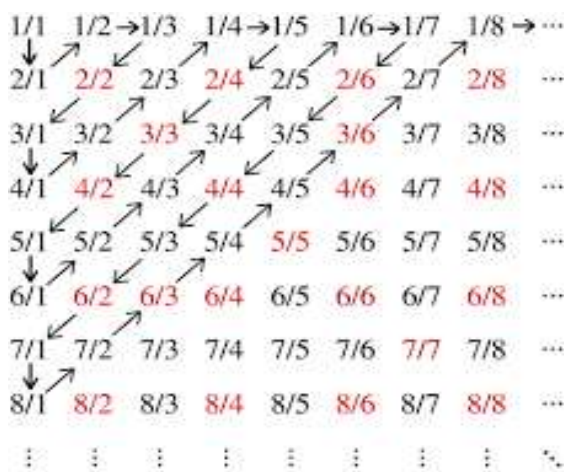
అనంతం గురించి అర్థం చేసుకోడానికి కొన్ని ప్రయోగాలు చేసి చూద్దాం. ముందుగా సహజ సంఖ్యలతో 1, 2, 3, ..., అనుకుంటూ ఒక పొడుగాటి జాబితా తయారు చేద్దాం. ఇదే విధంగా పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని 0, –1, +1, –2, +2, –3, +3, ..., అనుకుంటూ మరొక పొడుగాటి జాబితా తయారు చేద్దాం. ఇప్పుడు ఈ రెండు జాబితాలలో ఏ జాబితాలో ఎక్కువ సంఖ్యలు ఉన్నాయి? సామాన్యులకి రెండవ జాబితాలో ఎక్కువ ఉన్నట్లు అనిపిస్తుంది కాని అది కేవలం ఒక భ్రమ అని నిరూపించడం తేలిక. బొమ్మ 4.1 లో చూపినట్లు పూర్ణ సంఖ్యలని పై వరుసలోను, సహజ సంఖ్యలని కింది వరుసలోను అమర్చి, ఈ రెండు వరసల మధ్య "ముఖా–ముఖీ సంబంధం" (one-one correspondence) చూపిస్తూ రెండు తలల బాణపు గుర్తులు వేద్దాం. దీనిని బట్టి పై జాబితాలో ఎన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయో కింది జాబితాలోనూ అన్నే సంఖ్యలు ఉన్నాయని స్పష్టం అవుతోంది కదా. కనుక సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో పూర్ణ సంఖ్యలూ అన్నే ఉన్నాయి. ఇది నమ్మ శక్యం కాని నిజాలలో ఒకటి!



బొమ్మ 4.1 సహజ సంఖ్యలు (Naturals) ఎన్ని ఉన్నాయో పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers) కూడ అన్నే ఉన్నాయని ఋజువు చేసే చిత్రం.

ఇప్పుడు మరొక ప్రయోగం చేద్దాం. సహజ సంఖ్యకీ, సహజ సంఖ్యకీ మధ్య ఉన్న ఖాళీలో భిన్నాలు ఉన్నాయి కదా. ఉదాహరణకి 1 కి, 2 కి మధ్య 1/2, 1/3, ¼,... వగైరాలు ఉన్నాయి. అంతే కాదు; 2/3, 2/4, 2/5, వగైరాలు కూడ ఉన్నాయి. అంతే కాదు; ¾, 3/5, వగైరాలు కూడ ఉన్నాయి. ఈ "వగైరాలని" లెక్క వేసుకుంటూ పోతే అవి కూడ అనంతంగా ఉంటాయి.

అంటే ఏమిటన్నమాట? నిజ రేఖ మీద ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య చూసినా అనంతమైనన్ని భిన్నాలు ఉన్నాయి. అనంతమైనన్ని పూర్ణసంఖ్యల మధ్య ఉన్న అనంతమైనన్ని ఖాళీ స్థలాలలో, ప్రతి దాంట్లోను, అనంతమైనన్ని భిన్నాలు ఉన్నాయి. అటువంటప్పుడు మొత్తం భిన్నాలు ఎన్ని? "అనంతమైనన్ని అనంతాల మొత్తం" కదా! అంటే సహజ సంఖ్యల "అనంతం" కంటె భిన్న సంఖ్యల "అనంత అనంతం" బాగా పెద్దదయి ఉండాలి. అవునా? అబ్బే! అది అలా కాదు; సహజ సంఖ్యలు ఎంత అనంతంగా ఉన్నాయో భిన్న సంఖ్యలు కూడ అంతే అనంతగా ఉన్నాయి అని కేంటర్ (Georg Cantor, 1845 – 1918) ఉటంకించేరు. మొదట్లో ఎవ్వరూ నమ్మలేదు. దీనిని ఋజువు చేసి చూపిస్తాను.



బొమ్మ 4.2 భిన్నాలు (నిష్ప సంఖ్యలు) అనంతంగా ఉన్నాయని ఋజువు చెయ్యడం

మనకి తెలిసిన భిన్నాలని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చుదాం (బొమ్మ 4.2 చూడండి). ఈ బొమ్మని జాగ్రత్తగా రెండు నిమిషాలు అధ్యయనం చెయ్యండి. ఏక–లవ భిన్నాలు అన్నీ మొదటి అరుసలో

ఉన్నాయి. ద్వి–లవ భిన్నాలు అన్నీ రెండవ అరుసలో ఉన్నాయి. అలా అనంతమైనన్ని అరుసలు ఒక దాని కింద మరొకటి ఉన్నాయి. ప్రతి అరుస అంతు లేకుండా అలా కుడి పక్కకి పోతూనే ఉంది. ఈ పట్టికలో మనం ఊహించగలిగే భిన్నాలు అన్నీ ఉన్నాయి. ఒక్క రవ ఆలోచించి చూసుకోండి. ఇప్పుడు, ఇందాకటి లాగే, సహజ సంఖ్యలని ఒక వరుసలో అమర్చి, వాటికి ఎదురెదురుగా వచ్చేలా ఈ పట్టికలోని భిన్నాలని అమర్చగలమేమో చూద్దాం. బొమ్మ 4.2 లోని మొదటి అరుస (row)తో సహజ సంఖ్యలని అమర్చడానికి ప్రయత్నిస్తే ఈ పని జన్మకి తెమలదు. ఎందువల్ల? రెండు శ్రేణులలోనూ అనంతమైనన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయి కనుక. ఈ లెక్కని బొమ్మ 4.2 లోని రెండవ అరుసకి అవకాశమే రాదు. ఈ చిక్కు నుండి బయట పడడానికి ఒక మార్గం ఉంది. బొమ్మ 4.2 లో చూపించిన వ్యూహంలోని సంఖ్యలన్నిటిని ఒకే వరుస క్రమంలో వచ్చేలా అమర్చుదాం. ఈ వరుస క్రమం బొమ్మలో వాలు బాణం గీతలతో చూపించేను. ఈ పద్ధతిని సహజ సంఖ్యలనీ, నిష్ప సంఖ్యలనీ ముఖా–ముఖీ సంబంధం వచ్చేలా అమర్చవచ్చు. అంటే సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో నిష్ప సంఖ్యలు అన్నే ఉన్నాయి! సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో సరి సంఖ్యలు కూడ అన్నే ఉన్నాయి!!

ఇదే ధోరణిలో మరొక్క ప్రయోగం చేద్దాం. సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో అనిష్ప సంఖ్యలు కూడ అన్నే ఉన్నాయా? సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో నిజ సంఖ్యలు కూడ అన్నే ఉన్నాయా? ఈ సమస్యలకి ఋజువులు చూపిస్తూ కూర్చుంటే మనం ఇక్కడ నుండి బయట పడేది ఎప్పుడు? అందుకని టూకీగా సమాధానం చెప్పేస్తాను. నిజ సంఖ్యలు కూడ అనంతమే కాని "నిజ సంఖ్యల అనంతం" మనకి ఇంతవరకు పరిచయమైన "సహజ సంఖ్యల అనంతం" కంటె పెద్దది. ఈ తేడాని గుర్తిస్తూ "సహజ సంఖ్యలు అనంతమే అయినా ఒక జాబితాలా రాయడానికి లొంగుతాయి" అంటారు. ఈ భావాన్నే ఇంగ్లీషులో "కౌంటబుల్" (countable) అంటారు కానీ "లిస్టబుల్" (listable) అనడం సమంజసమేమో అనిపిస్తుంది. అయితే లెక్క పెట్టడానికి లొంగని (uncountable or unlistable) అనంతాలు కూడ ఉంటాయా? "నిజ సంఖ్యలు ఎన్ని?" అని అడిగితే "అవి లెక్కపెట్టడానికి లొంగనన్ని" అని చెప్పాలి. ఇలా అనంతాలతో చెలగాటాలాడిన కేంటరు భారతదేశంలో పుట్టి ఉండవలసింది. మన వేదాంత తత్త్వం ఒక మోతాదు పడి ఉంటే మనిషికి ఈ అనంతాల చెలగాటంలో పిచ్చి ఎక్కి ఉండేది కాదు. ఉపనిషత్తులలో కనిపించే ఈ దిగువ శ్లోకంలో

పూర్ణమదః పూర్ణమిదం పూర్ణాత్పూర్ణముదచ్యతే
పూర్ణస్య పూర్ణ మాదాయ పూర్ణమేవావసిష్యతి

"పూర్ణ" అంటే అనంతం అని అన్వయించుకుంటే, దీని అర్థం "అది పూర్ణం. ఇది కూడా పూర్ణం. ఈ పూర్ణం నుండి ఆ పూర్ణం వచ్చింది. పూర్ణం నుండి పూర్ణాన్ని తీసేస్తే మిగిలేది పూర్ణం." ఇదే కేంటరు అనంతానికి ఇచ్చిన లక్షణం.

రామానుజన్ స్నేహితులలో ఈ అనంతం కూడ ఉంది. ఈ అనంతం గురించి రామానుజన్ కి తెలిసినంత మరెవ్వరికీ తెలియదంటారు! కాని అనంతాల శ్రేణిని గురించి కేంటరు కనిపెట్టిన విషయాలు రామానుజన్ కి ఇండియాలో ఉన్న రోజులలో తెలిసి ఉండకపోవచ్చు.

ఆధారాలు:

1. Conway, J. H. and Guy, R. K. , *The Book of Numbers*, Springer–Verlag, New York, 1996
2. Robert Kanigel, *THE MAN WHO KNEW INFINITY: A Life of the Genius Ramanujan*, Scribner's hardcover, 1991

5. జంట సంఖ్యలు (Complex Numbers)

ఇప్పుడు మరొక రకం సంఖ్యల అవసరం ఎలా వస్తుందో తెలుసుకుందాం. నిజ (వాస్తవ) రేఖ మీద గుర్తు పెట్టగలిగే సంఖ్యలని నిజ (వాస్తవ) సంఖ్యలు అంటారు. నిజ రేఖ మీద ఒక చోట ఒక చుక్క పెట్టి అక్కడ 0 వేసి, అక్కడనుండి, కొలబద్ద సహాయంతో 1, 2, 3, ... అనుకుంటూ ఓపిక ఉన్నంత సేపు కుడిపక్కకి జరుగుతూ చుక్కలు పెట్టుకుంటూ పోవచ్చు. సున్న నుండి ఎడం పక్కకి జరుగుతూ −1, −2, −3,..... అనుకుంటూ కూడ చుక్కలు పెట్టగలం. అలాగే ½, 2/3, అనుకుంటూ మనకి తోచిన నిష్ప సంఖ్యల (rational numbers) ఉనికిని గుర్తు పెట్టవచ్చు. నిష్పత్తి రూపంలో రాయడానికి కుదరని $\sqrt{2}$ వంటి అనిష్ప సంఖ్యలని (irrational numbers), π, e, మొదలైన లోకోత్తర సంఖ్యలని (transcendental numbers) ని కూడ ఈ నిజ రేఖ మీద గుర్తించవచ్చు.

5.1 కల్పన సంఖ్యలు (Imaginary Numbers)

కాని కొన్ని సందర్భాలలో – ప్రత్యేకించి సర్వసాధారణంగా ఎదురయ్యే వర్గ సమీకరణాలని పరిష్కరించే సందర్భాలలో కూడ – ఋణ సంఖ్యలకి వర్గమూలం తియ్యవలసిన అవసరం వస్తూ ఉంటుంది. ఉదాహరణకి $x^2 + 2x + 2 = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క రెండు మూలాలు (roots) లేదా శూన్యస్థానాలు (zeros) లెక్క కట్టేటప్పుడు ($\sqrt{-4}$) అనే గణిత ప్రక్రియ (అంటే, ఋణ 4 కి వర్గమూలం తియ్యడం) చెయ్యవలసిన అవసరం వస్తుంది. ఇంతకీ ($\sqrt{-4}$) అంటే ఏమిటి? అనగా, ఏ రెండు సర్వసమానమైన సంఖ్యలని గుణిస్తే ఫలితం (− 4) అవుతుంది? ఇది అసంభవమైన పని, ఎందుకంటే రెండు సర్వసమానమైన సంఖ్యలని (రెండూ ధన అయినా, రెండూ ఋణ అయినా) వాటిని గుణిస్తే వచ్చే సమాధానం ఎల్లప్పుడు ధన సంఖ్యే అవుతుంది కదా. అంటే ఋణ సంఖ్యకి వర్గమూలం తియ్యడం అనే పని అసంభవం. కాని ఇలా ఋణ సంఖ్యకి వర్గమూలం తియ్యవలసిన పని తరచు ఎదురవుతూ ఉంటుంది. కాని నిజ రేఖ మీద తారసపడే సంఖ్యలలో ఈ రకం లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలు లేవు. లేదా, ఈ రకం సంఖ్యలకి నిజ రేఖ మీద చోటు లేదు. పూర్వం సంకలనం, వ్యవకలనం,

గుణకారం, భాగారం చేసినప్పుడు ఎదురయిన సంవృతం (closure) లాంటి పరిస్థితి కాదు ఇది. అంతకంటె విషమమైనది.

ఈ పరిస్థితిని ఎదుర్కోడానికి మనకి కొత్త జాతి సంఖ్యలు కావాలి. వాటికి ఏ లక్షణం ఉండాలి? అన్ని విధాలా సర్వసమానంగా ఉన్న రెండింటిని తీసుకుని గుణిస్తే ఋణ సంఖ్య రావాలి. అదీ మన గొంతేలమ్మ కోరిక. ఎలా ఈ కోరిక తీర్చడం?

5.2 జంట సంఖ్యలు (Complex Numbers)

ఇక్కడ ఉపమానానికి ఒక కట్టు కథ చెబుతాను. పూర్వం ఒక రైతు ఉండేవాడు. అతనికి సత్యం అనే మగ పిల్లాడు పుట్టేడు. అతను ఆ రైతుకి చేదోడు, వాదోడుగా ఉంటున్నాడు. సత్యం పెద్దయ్యాక ఇల్లు బోసిగా కనిపించడం మొదలు పెట్టింది. ఇంట్లో పిల్లలుంటే బాగుంటుంది కదా అని కొడుకుకి పెళ్లి చేసేడు. కోడలు కల్పన కాపురానికి వచ్చింది. మరో ఇంట పెరిగిన పిల్ల కదా; ఆమె ధోరణే వేరు. కొడుకు “ఎడ్డెం” అంటే కోడలు “తెడ్డెం” అనేది. పిల్లని ఇంట్లోంచి పొమ్మందామా అంటే ముసలాడికి మనవలు కావాలి. కనుక ఆ ముసలాడు కొడుకుకీ కోడలికీ మధ్య ఒక ఒప్పందం కుదిర్చేడు. ఇంట్లో ఏ నిర్ణయం చెయ్యవలసి వచ్చినా కొడుకు సత్యం సూచించిన దిశలో కాకుండా, కోడలు కల్పన సూచించిన దిశలో కాకుండా, ఇద్దరి మాటా చెల్లుతూన్నట్లు అనిపించేలా, మధ్యేమార్గం అవలంబించడం మొదలు పెట్టేరు. అంటే, ఇటుపైన ఏకాభిప్రాయానికి బదులు "జంటాభిప్రాయం" అమలులోకి వచ్చింది.

పైన చేసుకున్న ఒప్పందాన్ని ఒక బొమ్మ రూపంలో చిత్రించుకుందాం. కొడుకు సత్యం ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని ఒక గీత మీద చుక్కలుగా ఊహించుకుందాం. ఇది "సత్య రేఖ." కోడలు ధోరణే వేరు కనుక ఆవిడ ఇష్టాఇష్టాలు ఈ సత్య రేఖ మీద కనబడవు, ఇమడవు. అందుకని ఆమె కోసం మరొక గీత గీద్దాం. దానికి మరొక పేరు పెట్టాలి కదా? దానికి “కల్పన రేఖ” అని పేరు పెడదాం. కొడుకు ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని సత్య రేఖ మీద చుక్కలుగా ఊహించుకున్నట్లే కోడలి ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని “కల్పన

రేఖ" మీద చుక్కలుగా ఊహించుకుందాం. ఇప్పుడు ఇంట్లో ఏ నిర్ణయం చెయ్యవలసి వచ్చినా కొడుకు, కోడలు అభిప్రాయాలు వెలిబుచ్చుతారు. కొడుకు అభిప్రాయాన్ని (3) అందాం. కోడలి అభిప్రాయాన్ని (4) అందాం. ఇప్పుడు "జంట అభిప్రాయం" కావాలంటే సత్య రేఖ మీద, కుడి వైపు 3 అడుగులు వేసి, కల్పన రేఖ మీద 4 అడుగులు ఎగువకి వెళ్లాలి. ఇదే విధంగా జంట అభిప్రాయం (−2, 5) అంటే సత్య రేఖ మీద వెనక్కి రెండడుగులు వేసి, కల్పన రేఖ మీద ఎగువకి 5 అడుగులు వెయ్యాలి. అదీ నియమం.

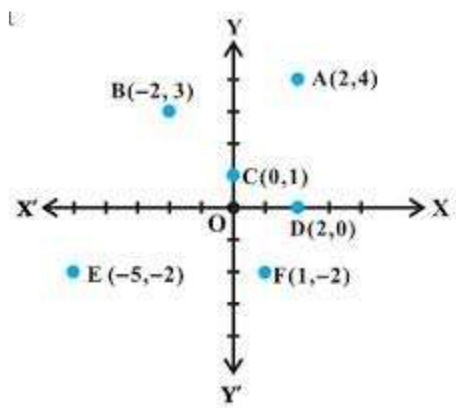


Fig 5.1

బొమ్మ 5.1 సత్య రేఖ (x), కల్పన రేఖ (y), జంట అభిప్రాయాలు (x, y)

చూసేరా! నిజ "రేఖ" మీద కుడి వైపు, ఎడమ వైపు మాత్రమే ప్రయాణం సాధ్యం. ఇప్పుడు మనం సృష్టించిన కల్పన "తలం" మీద తూర్పు, పడమర, ఉత్తర, దక్షిణ దిశలలోనే కాకుండా లెక్క పెట్టలేనన్ని దిశలలో ప్రయాణం చెయ్యవచ్చు. ఏకాకిగా బతికిన సత్యానికి రెండే రెండు దిశలు శరణ్యం అయితే ఏకాకిగా బతికిన రోజుల్లో కల్పనకి కూడా రెండే దిశలు శరణ్యం అయాయి. ఇప్పుడో? పెళ్లయిన తరువాత వారికి దొరికిన జంట అవకాశాలు అనంతం. కనుక వారిరువురు కలసి నిర్మించుకున్న ఈ జంట తలం, ఈ కల్పన తలం, వారి ఊహా స్వర్గమే. తన ఊహకి మించిన స్వర్గాన్ని చవి చూస్తోంది కనుక కల్పన తన పేరు మీదుగా ఉన్న కల్పన రేఖని "ఊహా రేఖ" అని కూడ పిలుస్తూ ఉంటుంది.

మన ఉపమానం పూర్తి అయింది. ఇప్పుడు నిజ రేఖ నిజ సంఖ్యలకి స్థావరాలుగా వాడదాం. నిజ రేఖ మీద ఇమడని $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, వంటి అసాధారణ సంఖ్యలకి ఊహా రేఖ మీద స్థావరాలు కల్పిద్దాం. రాత

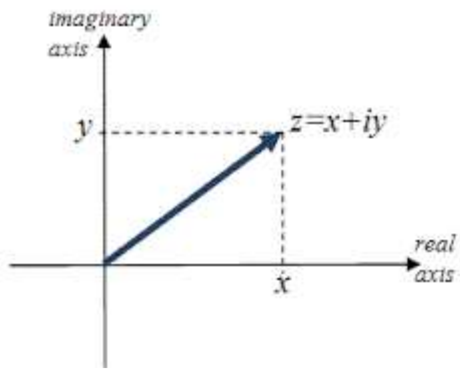
సౌలభ్యం కొరకు $\sqrt{-1}$= i అనిన్ని, $\sqrt{-2}$ = 2i అనిన్నీ అనుకుంటూ కల్పనా రేఖ మీద స్థావరాలని సూచిద్దాం. ఈ అసాధారణ సంఖ్యలని, కల్పన గౌరవార్థం, కల్పన సంఖ్యలు, లేదా ఊహా సంఖ్యలు (imaginary numbers) అని అందాం. ఈ రెండింటిని కలిపి "జంట సంఖ్యలు" (complex numbers) అందాం. ఈ జంట సంఖ్యలలో ఏవి సత్యానివో, ఏవి కల్పనవో అనుమానం లేకుండా చెప్పడానికి కల్పన రేఖ మీద సంఖ్యలన్నిటి ముందు i అనే అక్షరం చేర్చుదాం. ఈ పద్ధతి ప్రకారం (3, – 4i) అంటే 3 అడుగులు నిజ రేఖ మీద కుడి వైపు వేసి, అక్కడ నుండి 4 అడుగులు కల్పన రేఖ మీద దిగువకి వెళ్లాలి అని అర్థం.

మన దురదృష్టం కొద్దీ ఇంగ్లీషులో "ఇమేజినరీ," "కాంప్లెక్స్" వంటి క్లిష్టమైన పదాలు వాడి మనకి భయం పుట్టించేరు కాని "నిజ సంఖ్యలు" లో ఎంత వాస్తవం ఉందో "కల్పన సంఖ్యలు" లోనూ అంతే వాస్తవం ఉంది. సత్యం ఎంత వాస్తవమో, కల్పన అంతే వాస్తవం. మనవాళ్లు ఇంగ్లీషులో ఉన్న complex numbers ని యథాతథంగా అనువదించి వీటిని “సంకీర్ణ సంఖ్యలు” అనమన్నారు. వీటిలో సంకీర్ణత ఏముంది? నిజానికి నిజ (వాస్తవ) సంఖ్యలలో “వాస్తవత్వం” ఏమీ లేదు, కల్పన (imaginary) సంఖ్యలలో “కల్పన” ఏమీ లేదు. ఇంగ్లీషు వాడుకలో complex, real, imaginary అనేవి పాతుకుపోయాయి. వీటికి సమానార్థకమైన తెలుగు మాటలు తయారు చేసుకునేటప్పుడు వాటి స్వరూప, స్వభావాలకి అనుగుణంగా పేర్లు పెట్టుకుందాం.

ఇదీ జంట బీజగణితానికి నాంది. ఆడదాని ప్రాపు లేకుండా మగాడు దమ్మిడీకి కూడ ఎలా చెల్లడో అదే విధంగా కల్పన అక్షం సహాయం లేకుండా కేవలం నిజ అక్షాన్ని పట్టుకుని వేల్లాడుతూ కూర్చుంటే చెయ్యవలసిన పనులు చెయ్యడం కష్టం.

ఇప్పుడు మనం నిర్మించిన జంట తలం (complex plane) ఎలా ఉంటుందో చూద్దాం. (బొమ్మ 5.2 చూడండి). ఎడమ నుండి కుడికి వెళ్లే గీతని నిజ అక్షం(real axis) అందాం. దీనికి లంబ దిశలో అడుగునుండి పైకి వెళ్లే గీతని కల్పన అక్షం (imaginary axis) అందాం. మనకి ఎదురయ్యే సంఖ్యలు నిష్ప సంఖ్యలు కాని, అనిష్ప సంఖ్యలు కాని అయితే వాటికి ఈ నిజ అక్షం మీద ఎక్కడో ఒక

చోట స్థావరం దొరుకుతుంది. మనకి ఎదురయ్యే "జంట సంఖ్య" (complex number) z అయితే దాని స్థావరం "జంట తలం" లో ఎక్కడో ఒక చోట ఉంటుంది. అది ఎక్కడ ఉంటుంది? జంట సంఖ్య z లో సత్యం పాలు x, కల్పన పాలు y అయినప్పుడు z = (x , i y) లేదా z = x + i y రాస్తారు.



బొమ్మ 5.2 జంట తలంలో ఒక జంట సంఖ్య z ని సూచించడం

5.3 రామానుజన్, జంట సంఖ్యలు

రామానుజన్ ఇంగ్లండు వెళ్లక పూర్వం ఆయనకి ఈ జంట సంఖ్యల ఉనికి తెలిసి ఉన్నట్లు దాఖలాలు లేవు; ఋష్యశృంగుడు లా అయన నిజ రేఖ మీద కనబడే నిజ సంఖ్యల మధ్యనే బతికేడు. జీటా ప్రమేయం విలువ కట్టినప్పుడు కూడ ఆయన ఋణ నిజ రేఖ మీద విలువలనే లెక్కలోకి తీసుకున్నట్లు కనిపిస్తుంది. అంటే రామానుజన్ "ఆయిలర్ జీటా ప్రమేయాన్ని" మళ్లా సొంతంగా కనిపెట్టి నిజ రేఖ మీద దాని లక్షణాలని గుర్తించేరు. కాని ఇదే ప్రమేయాన్ని రీమాన్ జంట తలానికి అనువర్తింపచేసేరన్న విషయం రామానుజన్ కి తెలియక పోవడం మన దురదృష్టం. ఈ కారణం వల్ల రామానుజన్ ఇండియాలో ఉండగా ప్రధాన సంఖ్యల మీద చేసిన పరిశోధన అంతా ఒక విధంగా "కంచి గరుడ సేవే" అయిపోయింది.

6. అర్ధగర్భితమైన శ్లోకాలు

మన దైనందిన జీవితంలో సంఖ్యలని సూచించటానికి జోడీ, పుంజీ, చెయ్యి, పుష్కరం అని వాడినట్లే మన అలంకార, ఛందో తత్త్వ శాస్త్రాలలో, ఎన్నో సందర్భాలలో, సంఖ్యలని స్ఫురింప చెయ్యటానికి సంకేతాలు వాడేవారు. ఆకాశం శూన్యానికి సంకేతం. సూర్యుడు, చంద్రుడు, భూమి ఒకటికి సంకేతాలు. నేత్రాలని రెండుకి సంకేతంగా వాడేవారు. 'హిమకరాంగ వియత్ శశి' అన్న సమాసాన్నే తీసుకుందాం. హిమకరుడు చంద్రుడు కనుక ఆ మాట ఒకటికి సంకేతం. అంగాలు ఆరు. వియత్ అనగా ఆకాశం కనుక అది సున్నకి గుర్తు. మళ్ళా శశి అంటే చంద్రుడు కనుక అది మరొక ఒకటి. కనుక ఇంత వరకు 1601 వచ్చేయి, కాని కథ పూర్తి కాలేదు. భాష ని ఎడమ నుండి కుడికి చదువుతాము కాని సంఖ్యల విలువ కట్టవలసి వచ్చినప్పుడు, 'అంకానాం వామతః గతిః' అన్నారు కాబట్టి సంఖ్యల విలువ ఎడమకి వెళుతూన్నకొద్దీ పెరుగుతుంది. కనుక 'హిమకరాంగ వియత్ శశి' అనే సమాసాన్ని తిరగేసి రాస్తే 1061 అవుతుంది. ఇలాగే 'మునివసునిధి' అంటే 987 అవుతుందని చదువరులే గ్రహించగలరు.

ఇలా అంకెలకి బదులు అక్షరాలు యవనులు కూడ రాసేరు కాని, ఈ పద్ధతిని ఒక పతాక స్థాయికి లేవనెత్తింది భారతీయులే. పెద్ద పెద్ద అంకెలని కుదించి చిన్న చిన్న మాటలలో చెప్పటంలో మన పూర్వులు దిట్టలు.

కాగితాలు, ముద్రణా యంత్రాలు లేని రోజులలో మన విజ్ఞాన సంపదని తరతరాల పాటు కాపాడి మన పూర్వులు మనకి అందించేరు. మరే 'టెక్నాలజీ' లేని రోజులలో శాస్త్రాన్ని కంఠతా పట్టటం ఒక్కటే వారికి తెలిసిన మార్గం. మన వర్ణాశ్రమ ధర్మంలో ఇలా కంఠతా పట్టే పనిని బ్రాహ్మణులకి అప్పగించేరు. కొంతమంది బ్రాహ్మణ బాలురు జీవితాంతం చెయ్య వలసిన పని ఇదే. వాళ్ళని 'లివింగ్ రికార్డర్స్' అనో, సజీవ గ్రంధాలయాలు అనో అన్నా అది అతిశయోక్తి కానేరదు. వాళ్ళు కంఠస్థం చేసే శ్లోకాలు వారికి అర్ధం అయితే మరీ మంచిది; కాని అర్ధం అవక్కర లేదు. (ముద్రాపకుడికి ముద్రించే విషయాలన్నీ అర్ధం అవుతాయా?) స్వరం తప్పకుండా, శబ్ద దోషం లేకుండా కంఠతా పట్టటం, తర్వాత అదే

విషయం శిష్యులకో, కొడుకులకో నేర్పటం. వీళ్లు శ్లోకాలు ఇలా వల్లె వేస్తూ కూర్చుంటే కడుపు నిండేదెలా? అందుకని ఈ కంఠోపాఠం చేసే సంప్రదాయాన్ని ('ఓరల్ ట్రెడిషన్') ని రక్షించటానికి రాజులు బ్రాహ్మణులని పోషించటం మొదలు పెట్టేరు. ఇలా కొన్ని శతాబ్దాలపాటు ఆక్షేపణ లేకుండా జరిగింది.

తర్వాత తాళపత్రాల మీద ఘంటంతో రాయటం నేర్చుకున్నారు. తాళపత్ర గ్రంథాలతో 'ఇంటింటా సొంత గ్రంథాలయం' నిర్మించటానికి అవకాశాలు తక్కువ. కనుక రాత వాడుకలోకి వచ్చిన తర్వాత కూడ కంఠస్థం చెయ్యటం అనే ప్రక్రియ మన విద్యా విధానంలో ఒక ముఖ్యాంశం అయిపోయింది.

వచనాన్ని కంఠస్థం చెయ్యటం కన్న పద్యాన్ని కంఠస్థం చెయ్యటం తేలిక. అందుకనే ఆర్యభట్టు, భాస్కరాచార్యులు మొదలైనవారంతా గణితాన్ని కూడ శ్లోకాలలోనే రాసేరు. జ్ఞాపకం పెట్టుకోడానికి పద్యంలో బిగుతు ఉండాలి. విశాలమైన భావాన్ని క్లుప్తంగా పద్య పాదాలలో ఇరికించగలిగే స్థోమత ఉండాలి. అందుకని మన వాళ్లు ఒక సంక్షిప్త లిపి (code) ని తయారు చేసుకున్నారు. గణితశాస్త్రం లోని సునిశితమైన విషయాలని ముందు సంక్షిప్త లిపి లోనికి మార్చి, దానిని చందస్సుకు సరిపడా పద్య పాదం లోనికి ఇరికించేసరికి దాని లోని గూఢార్థం మనబోటి అర్భకులకి అందుబాటులో లేకుండా పోయింది. అంతే కాని, విద్యని, విజ్ఞానాన్ని రహస్యంగా దాచాలనే దుర్బుద్ధి మన సంస్కృతిలో ఎప్పుడూ, ఎక్కడా లేదు.

మన పురాతన గ్రంథాలలోని మూల భావం కూలంకషంగా అర్థం చేసుకోవాలంటే వ్యాకరణ సూత్రాలు అర్థమైనంత మాత్రాన సరిపోదు. వారు కాచి వడపోసిన సూత్రాలలోని అంతరార్థం కూడ అర్థం కావాలి. ఇలా గూఢ భాషలో, సంక్షిప్త లిపిలో రాయటం కంఠోపాఠానికి అనుకూలిస్తుందనే చేసేరు తప్ప విద్యని నలుగురికి పంచిపెడితే శేముష్య సంపద (intellectual property) కి నష్టం వస్తుందని కాదు. ఇలా శేముష్య సంపద వంటి ఊహలు ఎవరి పుర్రెలోనైనా పుడితే వారిని నిరుత్సాహ పరచటానికా అన్నట్లు, 'తనకి వచ్చిన విద్యని శిష్యులకి బోధించని గురువు మరుసటి జన్మలో బ్రహ్మ రాక్షసుడు అవుతాడు' అనే లోక ప్రవాదం లేవదీసేరు.

ఈ నేపధ్యంలో ఆర్యభట్టీయం లోని పన్నెండవ శ్లోకాన్ని కొంచెం పరిశీలిద్దాం:

మఖి భఖి ఫఖి ధఖి ణఖి ఞఖి
ఙఖి హస్ఝ స్కకి కిష్గ ఘకి కిఘ్వ
ఘ్లకి కిగ్ర హక్య ధకి కిచ
స్గజ్ఞ ఙ్వ క్ల ప్త ఫ చ కళార్ధ జ్యా

ఈ శ్లోకంలో ఆఖరి పదం ఒక్కటే సంస్కృతం; మిగిలిన 24 పదాలూ 24 శబ్ద సముదాయాలు. వాటికి భాషలో అర్థం లేదు. వీటిలో ప్రతి శబ్ద సముదాయమూ ఒక అంకెని కాని, సంఖ్యని కాని సూచిస్తుంది. ఈ అంకెలన్నీ 'జ్యా' అనే రేఖాగణిత భావాన్ని నిర్వచించటానికి ఉపయోగపడతాయి. మనం ఈ రోజులలో త్రిగుణమాత్రుకం (trigonometry) లో వాడే 'సైన్' (sine) యొక్క నిర్వచనం ఈ శ్లోకంలో గూఢమైన పద్ధతిలో నిబిడీకృతమై ఉంది. ఈ పద్ధతి కూడ ఆర్యభట్టే ప్రవేశపెట్టి ఉండొచ్చు. ఈ శ్లోకం అర్థం చేసుకోవాలంటే కొంచెం శ్రమ పడాలి.

6.1 కటపయాది సూత్రం

తెలుగు లోనూ, సంస్కృతం లోనూ 25 హల్లులని ఐదు వర్గాలుగా విడగొట్టి రాస్తాం కదా.

క, ఖ, గ, ఘ, ఙ: ఇవి క–వర్గు.
చ, ఛ, జ, ఝ, ఞ: ఇవి చ–వర్గు.
ట, ఠ, డ, ఢ, ణ: ఇవి ట–వర్గు.
త, థ, ద, ధ, న: ఇవి త–వర్గు.
ప, ఫ, బ, భ, మ: ఇవి ప–వర్గు.

ఈ 25 హల్లులకి 1, 2, 3, ..., 25 అనే విలువలు ఆపాదిద్దాం. ఇదే విధంగా య లగాయతు హ వరకు ఉన్న య, ర, ల, వ, శ, ష, స, హ లకి 30, 40, 50, 60, 70, 80 90, 100 అనే విలువలు ఆపాదిద్దాం.

ఇక మిగిలిపోయినవి సంస్కృతం లోని అచ్చులు. వీటి విలువలు ఈ దిగువ చూపిన విధంగా ఇద్దాం. (ఇక్కడ 100^3 అంటే 100 ని 3 సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చిన లబ్దం అని అర్థం. 100^0 యొక్క విలువ 1 అని నిర్వచనం.)

అ, ఆ: $100^0 = 1$

ఇ, ఈ: $100^1 = 100$

ఉ, ఊ: $100^2 = 10,000$

ఋ, ౠ: $100^3 = 1,000,000$

ఌ, ౡ: 100^4 = 1 తర్వాత 8 సున్నలు

ఏ: 100^5 = 1 తర్వాత 10 సున్నలు

ఐ: 100^6 = 1 తర్వాత 12 సున్నలు

ఓ: 100^7 = 1 తర్వాత 14 సున్నలు

ఔ: 100^8 = 1 తర్వాత 16 సున్నలు

ఈ పద్ధతిలో లెక్క పెట్టటం ఎలాగో చూద్దాం. ముందుగా గుణింతాలని పరిశీలిద్దాం. (ఇక్కడ ★ గుర్తు గుణకారానికి చిహ్నం.)

క = క★అ = 1 ★ (100^0) = 1

కి = క★ఇ = 1★ (100^1) = 100

గు = గ★ఉ = 3 ★ (100^2) = 30,000

ఇప్పుడు ద్విత్వాక్షరాలని పరిశీలిద్దాం.

గ్న = గ + న = 3 + 20 = 23

గ్ను = (గ + న) ★ ఉ = 23 ★ (100^2) = 230,000

ఖ్యు–ఘృ = ఖ్యు + ఘృ = (2 + 30) ★ (100^2) + 4 ★ (100^3) = 4, 320,000

ఇలా అంకెల స్థానంలో అక్షరాలు వాడి, ఆ అక్షరాలతో మాటలు పేర్చి, ఆ మాటలతో శ్లోకాలు కూర్చి, ఆ శ్లోకాలని కంఠస్థం చేసి, మన వాళ్ళు వాళ్ళకి తెలిసిన పరిజ్ఞానాన్ని మనకి అందించేరు.
ఇంతా విశదీకరించి పైన చూపిన శ్లోకం యొక్క అర్థం చెప్పక పోతే ఏమి బాగుంటుంది? ఒక వృత్తంలో నాల్గవ భాగాన్ని తురీయం అంటారు. ఇంగ్లీషులో 'క్వాడ్రెంట్' (quadrant). ఈ తురీయం లో ఉన్న 90 డిగ్రీలని 24 సమ భాగాలు చేస్తే ఒకొక్క భాగం 3.75 భాగలు (జ్యోతిష శాస్త్రంలో వచ్చే 'భాగ' అన్న మాట ఇంగ్లీషులోని 'డిగ్రి' కి సమానార్థకం). ఈ 3.75 భాగలని 60 పెట్టి గుణిస్తే 225

నిమిషాలు వస్తాయి, అవునా? (1 డిగ్రీ = 60 నిమిషాలు, 1 నిమిషం = 60 సెకండ్లు అనేది కోణ మానం.)

ఇప్పుడు మన శ్లోకం లోని మొదటి మాట 'మఖీ' విలువ ఎంతో లెక్క కడదాం.

మఖీ = 25 ★ (100^0) + (2★100) = 225.
కనుక మఖీ అంటే 225, లేదా ఒక వృత్తం లోని తురీయంలో 24 వ వంతు. ఇలాగే శ్లోకం అంతా ఓపిక పట్టి చదువరులు అర్ధం చేసుకుంటారని ఆశిస్తున్నాను. ఇలాగే వేదాలలో ఉన్న మంత్రాలు కూడ అర్థ గర్భితాలు. ఈ సూక్ష్మం కూడ పరిశోధన చేసి కనుక్కో వచ్చు.
ఆధారాలు:

1. RoddaM Narasimha, "Science in Terse Verse," *Nature*, 414:851, 2001
2. వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు, "అంకెలు–సంఖ్యలు: అర్ధగర్భితమైన శ్లోకాలు," ఈమాట, జూలై 2001, http:eemaata.com/

7. రామానుజన్ నుండి భార్గవ దాకా

దారిన పోయే దానయ్యని ఆపి 'అయిన్ స్టయిన్ ఏమిటి చేసేడయ్యా?' అని అడిగితే మూడొంతులు సరైన సమాధానమే రావచ్చు. కానీ, రామానుజన్ ఏమిటి చేసేడంటే – ఒక్క టేక్సీ కథని మినహాయించి – సామాన్యులు ఎవ్వరూ సరి అయిన సమాధానం చెప్పలేరు.

రామానుజన్ అంకెలతో చేసిన అనేకమైన గారడీలలో ఒక దానిని నలుగురికీ అర్థం అయే రీతిలో చెప్పటానికి ప్రయత్నిస్తాను. ముందస్తుగా 1, 4, 9, 16, 25 36, మొదలైన సంఖ్యలతో కథ మొదలు పెడతాను. ఏ ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థి అయినా సరే ఈ సంఖ్యలలో బాణీని ఇట్టే పసిగట్ట గలదు. వీటిని వర్గ సంఖ్యలు (square numbers) అందాం. ఎందుకంటే ఇవి 1, 2, 3, 4, 5, 6, మొదలైన సంఖ్యలని వర్గీకరించగా (అంటే, ఒక సంఖ్యని దాని తోటే గుణించటం) వచ్చిన సంఖ్యలు కనుక. వీటినే కొన్ని సందర్భాలలో చదరపు సంఖ్యలు అని కూడా అనటం కద్దు. ఈ వర్గ సంఖ్యలకి ఉన్న ప్రత్యేకత ఏమిటో చిన్న ఉదాహరణ ద్వారా వివరిస్తాను. మీకు తోచిన పూర్ణ సంఖ్య (integer) ని తీసుకొండి. ఈ పూర్ణ సంఖ్యని కొన్ని వర్గ సంఖ్యల మొత్తంగా రాయొచ్చు. ఉదాహరణకి: 10 = 1 + 1 + 4 + 4. మరొక ఉదాహరణ: 30 = 1 + 4 + 9 + 16.

సా. శ. 1770 లో ఫ్రాంసు దేశపు గణిత శాస్త్రవేత్త జోసెఫ్ లుయీ లగ్రాంజ్ ఒక సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి ఋజువు చేశారు: ప్రతి ధన పూర్ణ సంఖ్య (positive integer) తనంత తానుగా ఒక వర్గ సంఖ్య అయినా అయి ఉండాలి, లేదా రెండు కాని, మూడు కాని, నాలుగు కాని వర్గ సంఖ్యల మొత్తమయినా అయి ఉండాలి. ఎట్టి పరిస్థితులలోనూ నాలుగు వర్గల మొత్తం ($x^2 + y^2 + z^2 + t^2$) మించి అవసరం ఉండదు. (ఇక్కడ x^2 అంటే x ని రెండు సార్లు వేసి గుణించటం అని అర్థం.)

లగ్రాంజ్ ప్రవచించిన వ్యక్తీకరణం (expression) లో ఉన్న ($x^2 + y^2 + z^2 + t^2$) వంటి గణిత రూపాన్ని వర్గ రూపం (quadratic form) అంటారు. ఈ వర్గ రూపాల స్వభావం అర్థం అయిన

వెంబడి, ధన పూర్ణ సంఖ్యలని అభివర్ణించటానికి ఇటువంటి వర్గ రూపం ఇదొక్కటేనా లేక ఇంకా ఉన్నాయా అని అనుమానం రానే వచ్చింది. రావటం అంటే వచ్చింది కాని ఈ సమస్యకి పరిష్కారం ఉందో లేదో ఒకటిన్నర శతాబ్దాల వరకూ ఎవ్వరికీ తెలియలేదు.

ఇంతలో, 1916 లో, శ్రీనివాస రామానుజన్ "ఇదొక్కటే కాదు. ఇటువంటి వర్గ రూపాలు మొత్తం 53 ఉన్నాయి" అని వాటి జాబితా రాసి ఇచ్చేసేడు! ఉదాహరణకి ప్రతి సంఖ్యని ఒక వర్గ, రెండింతల వర్గ, మూడింతల వర్గ, నాలుగింతల వర్గల మొత్తం $(1.\, x^2 + 2.\, y^2 + 3.\, z^2 + 4.\, t^2)$ గా రాయవచ్చన్నారు ఆయన. కుతూహలంతో కుతకుత లాడే ప్రాణులకి ఈ 53 రూపాలూ ఈ దిగువ పట్టికలో చూపెడతాను. ఈ పట్టికలో వాడిన గణిత వ్యక్తీకరణం $(a.x^2 + b.y^2 + c.z^2 + d.t^2)$ అనుకుంటే ఇందులో a, b, c, d ల విలువలు ఎలా ఉంటాయో వరుసగా చూపించేను.

[1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 1, 1, 4], [1, 1, 1, 5], [1, 1, 1, 6], [1, 1, 1, 7],

[1, 1, 2, 2], [1, 1, 2, 3], [1, 1, 2, 4], [1, 1, 2, 5], [1, 1, 2, 6], [1, 1, 2, 7], [1, 1, 2, 8], [1, 1, 2, 9], [1, 1, 2, 10], [1, 1, 2, 11], [1, 1, 2, 12], [1, 1, 2, 13], [1, 1, 2, 14],

[1, 1, 3, 3], [1, 1, 3, 4], [1, 1, 3, 5], [1, 1, 3, 6],

[1, 2, 2, 2], [1, 2, 2, 3], [1, 2, 2, 4], [1, 2, 2, 5], [1, 2, 2, 6], [1, 2, 2, 7],

[1, 2, 3, 3], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 5], [1, 2, 3, 6], [1, 2, 3, 7], [1, 2, 3, 8], [1, 2, 3, 9], [1, 2, 3, 10],

[1, 2, 4, 4], [1, 2, 4, 5], [1, 2, 4, 6], [1, 2, 4, 7], [1, 2, 4, 8], [1, 2, 4, 9],

[1, 2, 4, 10], [1, 2, 4, 11], [1, 2, 4, 12], [1, 2, 4, 13], [1, 2, 4, 14],

[1, 2, 5, 6], [1, 2, 5, 7], [1, 2, 5, 8], [1, 2, 5, 9], [1, 2, 5, 10].

ఇదే విషయాన్ని ఈ దిగువ బొమ్మలో కూడ చూపెడుతున్నాను.

Universal Expressions: Looking for squares

Early last century, Srinivasa Ramanujan found 53 universal quadratics of the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, where *a*, *b*, *c*, and *d* are integers. This list provides the values of *a*, *b*, *c*, and *d* for each of these forms. For example, $1x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5t^2$ yields all positive integers for suitable choices of *x*, *y*, *z*, and *t*.

[1, 1, 1, 2]	[1, 1, 1, 3]	[1, 1, 1, 4]	[1, 1, 1, 5]	[1, 1, 1, 6]
[1, 1, 1, 7]	[1, 1, 2, 2]	[1, 1, 2, 3]	[1, 1, 2, 4]	[1, 1, 2, 5]
[1, 1, 2, 6]	[1, 1, 2, 7]	[1, 1, 2, 8]	[1, 1, 2, 9]	[1, 1, 2, 10]
[1, 1, 2, 11]	[1, 1, 2, 12]	[1, 1, 2, 13]	[1, 1, 2, 14]	[1, 1, 3, 3]
[1, 1, 3, 4]	[1, 1, 3, 5]	[1, 1, 3, 6]	[1, 2, 2, 2]	[1, 2, 2, 3]
[1, 2, 2, 4]	[1, 2, 2, 5]	[1, 2, 2, 6]	[1, 2, 2, 7]	[1, 2, 3, 3]
[1, 2, 3, 4]	[1, 2, 3, 5]	[1, 2, 3, 6]	[1, 2, 3, 7]	[1, 2, 3, 8]
[1, 2, 3, 9]	[1, 2, 3, 10]	[1, 2, 4, 4]	[1, 2, 4, 5]	[1, 2, 4, 6]
[1, 2, 4, 7]	[1, 2, 4, 8]	[1, 2, 4, 9]	[1, 2, 4, 10]	[1, 2, 4, 11]
[1, 2, 4, 12]	[1, 2, 4, 13]	[1, 2, 4, 14]	[1, 2, 5, 6]	[1, 2, 5, 7]
[1, 2, 5, 8]	[1, 2, 5, 9]	[1, 2, 5, 10]		

బొమ్మ 7.1 రామానుజన్ ఇచ్చిన వర్గ రూపాల జాబితా

రామానుజన్ సాధించిన ఫలితం అవగాహన కాగానే గణితకులకి మరొక సమశ్య ఎదురైంది. మన మేధకి మరొక వర్గ రూపం స్ఫురించిందని అనుకుందాం. ఈ వర్గ రూపం తప్పో, ఒప్పో ఎలా తేల్చటం? అంటే ఆ రూపాన్ని ఉపయోగించి పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని రాయగలమో లేమో ఎలా తేల్చటం? పూర్ణ సంఖ్యలు అనంతం కనుక ఇది సైద్ధాంతికంగా నిర్ణయించ వలసినదే తప్ప ప్రాయోగిక పద్ధతులు పనికి రావు.

ఈ ప్రశ్న అపరిష్కృతంగా మొన్న మొన్నటి వరకూ ఉండి పోయింది. అమెరికాలో ప్రిన్స్టటన్ యూనివర్శిటీలో ఉన్న మంజుల్ భార్గవ, డూక్ యూనివర్సిటీలో ఉన్న జోనథన్ హెన్కే తో కలసి, పైన చెప్పిన జటిల సమస్యకి అతి తేలికైన సమాధానం ఉందని ఋజువు చేసేడు. భార్గవ తను సాధించిన పరిష్కారాన్ని కొన్ని సిద్ధాంతాల రూపంలో, డిసెంబరు 2005 లో, రామానుజన్ జన్మస్థలమైన కుంభకోణంలో, శాస్త్ర విశ్వవిద్యాలయంలో జరిగిన అంతర్జాతీయ సమావేశంలో విజ్ఞుల ఎదట నిరూపించి సభికులని ఆశ్చర్య చకితులని చేశాట్ట!

భార్గవ బాల్యం నుండీ గణితంలో ఉత్సాహం చూపెడుతూ వచ్చాట్ట. ఇతను 2001 లో ప్రిన్స్టటన్ లో పి. హెచ్. డి. చేసే రోజులలో మొదలు పెట్టిన పని పునాది అనుకుంటే కుంభకోణంలో చదివిన పరిశోధన పత్రం ఆ పునాది మీద కట్టిన మేడ. పునాదుల లోంచి ఈ మేడ ఎలా లేచిందో ఒక నఖ చిత్రంలా మీ ముందు చిత్రిస్తాను.

మళ్లా మనం చరిత్రలో కొంచెం వెనక్కి వెళ్ళాలి. జెర్మనీలో 1801 లో మహా మేధావి కార్ల్ ఫ్రీడ్రిక్ గౌస్ చేసిన పనిని ఆధారంగా చేసుకుని వర్గు రూపాల మీద పరిశోధన మొదలు పెట్టేడు, మన భార్గవ. గౌస్ పని చేసిన వర్గు రూపాలు $a.x^2 + b.x.y + c.y^2$ మాదిరి ఉంటాయి. ఇటువంటి రెండు వర్గు రూపాలని తీసుకుని వాటిని సంధించటం మీద కొన్ని సంధి సూత్రాలని (composition laws) ప్రవచించేరు గౌస్. సంధించటం అంటే కలపటం లాంటి ఒక ప్రక్రియే కాని కలపడం కాదు. గౌస్ ప్రవచించిన సంధి సూత్రాలే బీజీయ సంఖ్యా శాస్త్రం (Algebraic Number Theory) అనే ఒక కొత్త పుంతకి మార్గదర్శి అయేయి.

ప్రిన్స్టటన్ లో విద్యార్థి దశలోనే మన భార్గవ ఇటువంటి సంధి సూత్రాలని మరో పదమూడింటిని కనుక్కున్నాడు. కనిపెట్టటమే కాదు, గణిత శాస్త్ర రీత్యా ఈ సూత్రాలు ఎలా ఉద్భవించేయో కూడ ఋజువుతో సహా చూపెట్టేడు. ఈ పని ఫలితంగా భార్గవకి పట్టా ఇవ్వటమే కాకుండా 28 ఏళ్ళ చిరుత ప్రాయానికే ఆచార్య పదవి (full professor) ఇచ్చి గౌరవించింది, ప్రిన్స్టటన్. (బొమ్మ 7.2 చూడండి.)

బొమ్మ 7.2 మంజుల్ భార్గవ

ఇంతకీ భార్గవ చేసిందేమిటో చెప్పనే లేదు కదూ? ‘ఏ వర్గ సూత్రం ఉపయోగించి పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని వర్ణించగలం?’ అన్న ప్రశ్న భార్గవని మొదట్లో వేధించటం మొదలు పెట్టింది. ఈ రకం వర్గ రూపాలని విశ్వజనీన (లేదా సార్వత్రిక) వర్గ రూపాలు (universal quadratic forms) అంటారు.

గత శతాబ్దపు మొదటి రోజుల్లో రామానుజన్ $(a.x^2 + b.y^2 + c.z^2 + d.t^2)$ వంటి రూపాలపై దృష్టి కేంద్రీకరించేరని చెప్పుకున్నాము కదా. ఆయన ఈ జాతి రూపాలు 53 కనుక్కున్నారని కూడా జాబితా వేసి చూపించేను కదా. ఉదాహరణకి $(1.x^2 + 2.y^2 + 5.z^2 + 10.t^2)$ లో x, y, z, t ల విలువలని మార్చుకుంటూ పోతే ధన పూర్ణాంకాలన్నిటిని సృష్టించవచ్చు. ఉదాహరణకి 14 కావాలంటే $x = 1, y = 2, z = 1, t = 0$ అని ప్రతిక్షేపిస్తే సరిపోతుంది. అలాగే 32 కావాలంటే $x = 0, y = 2, z = 2, t = 1$ ప్రతిక్షేపించాలి.

‘ఇంకా ఇలాంటి సూత్రాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?’ అన్న ప్రశ్నకి సమాధానం చెప్పాలనుకుంటే, మనకి సులువైన పరీక్ష ఒకటి కావాలి. దీనికి ఒక ఉపమానం చెబుతాను. అన్నం వండుతూన్నప్పుడు బియ్యం ఉడికేయో లేదో తెలుసుకోవాలంటే మెతుకులన్నిటిని చిదిమి చూడక్కరలేదు; ఒకటో, రెండో చిదిమి

చూస్తే చాలు. అలాగే అనంతమైన సంఖ్యలన్నిటినీ పరీక్షిస్తూ కూర్చునే కంటె బహు కొద్ది అంకెలని పరీక్షించి, అవి ఆ పరీక్షలో నెగ్గితే ఆ సూత్రం సరి అయినదే అని నిర్ధారించటంలో సొగుసు లేదూ?

సా. శ. 1993 లో ప్రిన్స్టన్ యూనివర్సిటీ లో పని చేసే జాన్ కాన్వే అనే ఆచార్యుడు తన దగ్గర పని చేసే విద్యార్థి విలియం షీంబెర్గర్ తో కలసి అటువంటి విశ్వజనీన వర్గ రూపాన్ని ఒక దానిని ప్రతిపాదించేడు. ఈ రూపం ఒక మాత్రుక (matrix) రూపంలో రాసేరు వారు. ఈ రూపాన్ని ఉపయోగించి 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15 అనే తొమ్మిది సంఖ్యలని ఉత్పత్తి చెయ్యగలిగితే, మిగిలిన పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని కూడ ఉత్పత్తి చెయ్యగలం అనే సూత్రాన్ని వారిరువురు ‘ఋజువు’ చేసేరు. ఇదే 15–సిద్ధాంతం అనే పేరుతో చెలామణీ కావటం మొదలెట్టింది.

లోగడ మనం చూసిన లగ్రాంజ్ సూత్రాలు, రామానుజన్ సూత్రాలూ కూడ ఈ 15–సిద్ధాంతానికి లోబడే ఉంటాయి కనుక, సూత్ర భంగాలేమీ కాలేదని అందరూ ఒక సారి తేలికగా ఊపిరి పీల్చుకున్నారు. అయినా సరే కాన్వే ప్రభృతులు వారి సిద్ధాంతాన్నీ, దానిని ఋజువు చేసే సంక్లిష్టమైన పద్ధతినీ ఎక్కడా ప్రచురించ లేదు. ఇలా ప్రచురించకుండా ఉండటానికి సాధారణంగా రెండు కారణాలు ఉంటాయి. ఒకటి, సిద్ధాంతంలో ఏమైనా లొసుగులు ఉంటే పరువు పోతుందనే భయం. రెండు, సిద్ధాంతం అనువర్తించే వ్యాప్తిని పెంచి అప్పుడు ప్రచురిద్దాములే అనే సదుద్దేశం. అందుకని వారి సూత్రం అనువర్తించే పరిధిని పెంచటానికి పరిశోధన మొదలు పెట్టేరు. ఈ పరిశోధనలో వారు మరొక వర్గ రూపాన్ని కనుక్కున్నారు. ఈ రూపమే $(3.x^2 + xy + 5.y^2 + 6.z^2 + t^2)$. “ఈ రూపం ఉపయోగించి 1 నుండి 290 వరకు ఉన్న అన్ని సంఖ్యలని ఉత్పత్తి చెయ్య గలిగితే ఈ సూత్రాన్ని విశ్వజనీన వర్గ సూత్రంగా పరిగణించవచ్చు” అని ఒక ఊహాగానం చెసేరు. కాని ఋజువు చెయ్య లేదు (లేదా, ఋజువు చెయ్య లేకపోయి ఉండొచ్చు కూడా).

ఈ పరిస్థితిలో భార్గవకి కాన్వే ఈ 15–సిద్ధాంతాన్ని పరిచయం చేసేరు. “కాన్వే చెప్పిన కథనం విన్న తర్వాత నాకు నోట మాట రాలేదు. గణితంలో ఇటువంటి ఫలితం ఉందని తెలిసే సరికి ఆశ్చర్యం వెయ్యటం ఒక ఎత్తయితే, ఈ ఫలితం ఋజువు లేకుండా కేవలం ఊహాగానంలా ఉండిపోయిందని

తెలియటం మరొక ఎత్తు" అని భార్గవ వ్యాఖ్యానించి, "వెను వెంటనే నేను చేస్తూన్న పనులన్నీ ఆపేసి ఈ ఊహాగానానికి ఋజువు వెతకటం మొదలు పెట్టేను," అన్నాడుట.

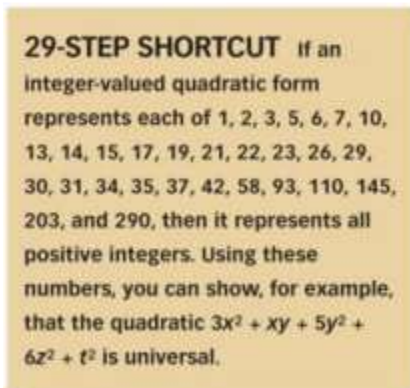
భార్గవ 15–సిద్ధాంతానికి ఒక కొత్త పంథాలో ఋజువుని నిర్మిచటం మొదలుపెట్టేడు. ఈ కొత్త దారి వెంబడి వెళితే ఋజువు చెయ్యటం తేలికవటమే కాకుండా, చాలా తక్కువ జాగాలో ఋజువు చెయ్యటానికి వీలయిందిట. ఈ ఋజువు ప్రకారం మొత్తం 204 (మాత్రుక రూపంలో నిర్వచించబడ్డ) విశ్వజనీన వర్గు రూపాలు ఉన్నాయిట.

ఈ ఋజువు గణిత ప్రపంచాన్ని అదరగొట్టింది. ఎందుకంటే సా. శ. 1948 లో మార్గరెట్ విల్లర్డింగ్ ఇదే ప్రశ్నని ఎదుర్కొని, అహర్నిశలు కష్టపడి 178 విశ్వజనీన వర్గు సూత్రాలు కనుక్కున్నారు. భార్గవ చేసిన పని నేపథ్యంలో ఆమె కనిబెట్టిన 178 సూత్రాలలో ఒకే సూత్రం పొరపాటున రెండు సార్లు దొర్లిందనిన్నీ, 9 సూత్రాలు పూర్తిగా తప్పనిన్నీ తెలిసింది. ముఖ్యమైన విషయం ఏమిటంటే భార్గవ ఇచ్చిన ఋజువులు చిన్నవి గానూ, అర్థం అయే రీతిలోనూ ఉన్నాయిట. పురుషులలో పుణ్య పురుషులు ఉన్నట్లే ఋజువులలో అందమైన ఋజువులు ఉంటాయి. సూటిగా, సంక్షిప్తంగా ఉన్న ఋజువులూ, సిద్ధాంతాలూ, సూత్రాలూ అందమైన వాటిగా లెక్క.

ఈ 15–సిద్ధాంతానికి ఋజువు కనుక్కున్న తర్వాత భార్గవ 33–సిద్ధాంతం అని మరో సిద్ధాంతం కనుక్కున్నారు. ఈ సూత్రం 1, 3, 5, 7, 11, 15, 33 సంఖ్యల ఎడల పనిచేస్తే మిగిలిన అన్ని బేసి సంఖ్యల ఎడల కూడా పనిచేస్తుందని ఈ 33–సిద్ధాంతం యొక్క సారాంశం. ఈ సిద్ధాంతాన్ని భార్గవ ఋజువు చేసిన వైనం చూసి "ఇది చాల అందమైన ఋజువు" అని కాన్వే అభివర్ణించేరుట.

ఇదే ధోరణిలో భార్గవ ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) అన్నింటిని ఉత్పత్తి చేయగల వర్గు రూపాన్ని ఒకదానిని నిర్మించేరు.

ఈ పావంచాలన్నీ దాటుకుని కాన్వే 290 గురించి ప్రతిపాదించిన ఊహాగానానికి కూడా భార్గవ, హెన్కె కలసి ఋజువు చూపించేరు. ఇదొక పెద్ద మైలు రాయి. కనుక ఇప్పుడు మనకి వర్గ సూత్రాల యొక్క స్వరూప స్వభావాలు పరిపూర్ణంగా అవగాహన అయినట్లే – అని అనుకుంటున్నాం, ప్రస్తుతానికి. వీరు చెప్పేది ఏమిటంటే – ఏ వర్గ రూపమైనా సరే పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని ఉత్పత్తి చెయ్యగలదో లేదో నిర్ణయించాలంటే ముందు ఆ రూపం 290 తోపాటు 290 కి లోపుగా ఉన్న ఒక 29 పూర్ణాంకాల సమితిని ఉత్పత్తి చెయ్యగలదో లేదో చూడాలిట. ఈ సమితి (set) లో ఉన్న 29 పూర్ణాంకాలనీ ఉత్పత్తి చెయ్యగలం అని తెలిసిన మీదట అలా ఉత్పత్తి చెయ్యగలిగే వర్గ రూపాలు 6,436 ఉన్నాయని ఋజువు చేసేరు! (బొమ్మ 7.3 చూడండి.)



29-STEP SHORTCUT If an integer-valued quadratic form represents each of 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203, and 290, then it represents all positive integers. Using these numbers, you can show, for example, that the quadratic $3x^2 + xy + 5y^2 + 6z^2 + t^2$ is universal.

బొమ్మ 7.3 "29 పూర్ణాంకాల సమితితో" అడ్డు దారి.

ఇదే విషయాన్ని భార్గవ కుంభకోణంలోని సమావేశంలో చెబితే ఆయనకి రామానుజన్ స్మారక చిహ్నమైన 'శాస్త్ర' పతకాన్ని ఇచ్చి గౌరవించేరుట. (ఇక్కడ 'శాస్త్ర' అన్నది Shanmugha Arts, Science, Technology & Research Academy కి ఆద్యక్షర సంక్షిప్తం అని గమనించ వలెను.) ఈ విశ్వవిద్యాలయం ప్రతి ఏటా, శ్రీనివాస రామానుజన్ పేర, పది వేల డాలర్ల నగదు బహుమానాన్ని 2005 నుండీ ఇవ్వటం మొదలు పెట్టింది. ఈ బహుమానం రామానుజన్ ఒరవడిలో పరిశోధన చేసి ఫలితాలు సాధించిన 32 ఏళ్లు లోపు గణిత శాస్త్రవేత్తకి ఇవ్వాలని నిర్ణయం జరిగింది.

అంతర్జాతీయంగా జరిగిన వడపోతలో ఈ బహుమానాన్ని 2005 లో భార్గవ, సౌందరరాజన్ (మిషిగన్ విశ్వవిద్యాలయం) అనే ఇద్దరు భారతీయ నేపథ్యం ఉన్న శాస్త్రవేత్తలు అందుకోవటం గమనార్హం.

"ఈ రకం లెక్కల ప్రయోజనం ఏమిటి?" అని చాల మంది పెదవి విరుస్తారు. అందమె ఆనందం అన్నారు. దీన్నే ఇంగ్లీషులో A thing of beauty is a joy for ever అంటారు. కనుక ఈ రకం ఋజువుల కోసం వెతకటం ఒక రకమైన సౌందర్యోపాసన. "పనికిమాలిన ఈ రకం ఉపాసనలు ఎవ్వరికి కావాలి?" అని తోసి పుచ్చకండి. ఈ కంప్యూటర్ యుగంలో cryptography కి ప్రాముఖ్యత పెరుగుతోంది. ఈ రంగంలో రామానుజన్ వంటి వారు చేసిన పరిశోధనలు ఉపయోగపడుతున్నాయి. ఇదే విధంగా విశ్వ రహస్యాలని ఛేదించటానికి వాడే String Theory లో వచ్చే గణితంలో కూడా రామానుజన్ ప్రభావం కనబడటం మొదలైంది.

ఆధారాలు:

1. Ivars Peterson, "All Square," *Science News*, March 11, 2006
2. Ken Ono, Honoring a gift from Kumbakonam,*Notices of the AMS*, 53:6, pp 640–651, June–July 2006.
3. వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు, "అంకెలు–సంఖ్యలు: రామానుజన్ నుండి భార్గవ దాకా," ఈమాట, సెప్టెంబర్ 2006, http:eemaata.com/

8. ప్రధాన సంఖ్యలు

బుద్ధుడి రోజుల నుండి సా. శ. 300 వరకు ఉన్న కాలం నాటికే పైథోగరోస్ సంబంధీకులైన గ్రీసు దేశస్తులకి అంకెలలో ఏదో మహత్తరమైన శక్తి ఉందనే గట్టి నమ్మకం ఒకటి ఉండేది. ఈ నమ్మకమే నేటికీ మనకి 'సూమరాలజీ' రూపంలో కనిపిస్తోంది. అంకెలలో ఏదో నిక్షిప్తమైన శక్తి ఉందనే నమ్మకానికి కారణం కొన్ని అంకెలలో వారికి కనిపించిన వైపరీత్యమైన లక్షణాలు కావచ్చు.

ఉదాహరణకి యవనులకి (గ్రీకు దేశస్థులకి) ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) గురించి కొంత తెలుసు. ప్రధాన సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి? ఏదైనా n అనే ఒక సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అవాలంటే దానికి రెండే రెండు కారణాంకాలు (factors) ఉండాలి: అవి 1, n అయి ఉండాలి. అప్పుడు ఆ సంఖ్యని ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదాహరణకి 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 మొదలైనవి ప్రధాన సంఖ్యలు. (ఈ నిర్వచనం ప్రకారం 1 ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాలో ఇమడదు. ఇప్పటికీ 1 ని ప్రధాన సంఖ్యగా పరిగణించిన సందర్భాలు కొన్ని పాత పుస్తకాలలో కనిపిస్తూ ఉంటాయి. తస్మాత్ జాగ్రత్త!)

8.1 ఇరటోస్తనీస్ జల్లెడ

ప్రాచీన కాలంలో, ఈజిప్టు లోని అలెగ్జాండ్రియా నగరంలో, జగద్విఖ్యాతి చెందిన బృహత్ గ్రంథాలయం ఒకటి ఉండేది. **ఇరటోస్తనీస్** (Eratosthenes, క్రీ. పూ. 276–194) అనే ఆసామీ ఈ గ్రంథాలయానికి అధిపతిగా ఉండేవాడు. సాధారణ శకం ఆరంభం కాని ముందు రోజుల్లో, ప్రపంచంలో, వేళ్లమీద లెక్కించదగ్గ మహా మేధావులలో ఈయనని ఒకరుగా లెక్కించడం పరిపాటిగా ఉండేది. ఆ రోజులలోనే భూమి గుండ్రంగా ఉందని లెక్క వేసి చెప్పటమే కాకుండా, భూమి యొక్క వ్యాసార్ధం ఎంతుంటుందో అంచనా వేసి చెప్పేడీయన. ఈ మేధావి ప్రధాన సంఖ్యల మీద కూడ పరిశోధనలు చేసి "ఇరటోస్తనీస్ జల్లెడ" అనే ఊహాత్మకమైన పరికరాన్ని ఒకదానిని మనకి ఒదిలిపెట్టి మరీ వెళ్లిపోయాడు. ఈ జల్లెడలో సంఖ్యలన్నిటిని వేసి "జల్లిస్తే" ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ జల్లెడలో ఉండిపోతాయి, మిగిలినవి అన్నీ కిందకి దిగిపోతాయి.

ఈ ఇరటోస్తనీస్ జల్లెడ ఎలా పని చేస్తుందో ఇప్పుడు చూద్దాం. ముందు సహజ సంఖ్యలన్నిటినీ, ఈ దిగువ చూపిన విధంగా (1 ని మినహాయించి) బారులు తీర్చి రాసుకోవాలి.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21,.......
41,.....

నిర్వచనం ప్రకారం 2 ఎల్లప్పుడూ ప్రధాన సంఖ్యే. దీని చుట్టూ ఒక సున్న చుడదాం. ఇప్పుడు 2 తరువాత నిర్విరామంగా వచ్చే ప్రతీ రెండవ సంఖ్యనీ (అంటే, 4, 6, 8, 10....వగైరాలు) కొట్టివెయ్యండి. (చెరిపెయ్య వద్దు; ఒక గీటు గీసి కొట్టివెయ్యండి.) ఇప్పుడు పైన చూపిన వరుసలో కొట్టివెయ్యకుండా మిగిలిన సంఖ్యలు ఈ దిగువ చూపిన విధంగా ఉంటాయి.

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,....

ఇప్పుడు ఈ కొత్త వరసలో 2 తరువాత కొట్టివేయబడకుండా వచ్చే మొదటి సంఖ్య, అనగా 3, చుట్టూ ఒక సున్నా చుడదాం. ఈ దశలో ఇది లంగరు. ఇప్పుడు 3 తరువాత నిర్విరామంగా వచ్చే ప్రతీ మూడవ సంఖ్యలనీ (అంటే, 6, 9, 12,15,.... వగైరాలని) కొట్టివెయ్యండి. గతంలో ఒక సారి కొట్టేసిన సంఖ్యలని మళ్లా కొట్టేయవలసి వచ్చినా మరేమీ పరవా లేదు. ఇప్పుడు పైన చూపిన వరుసలో మిగిలిన సంఖ్యలు ఈ దిగువ చూపిన విధంగా ఉంటాయి.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25,

ఇలా కొట్టేసుకుంటూ పోతే, కొంతసేపు పోయిన తరువాత జల్లెడలో ప్రధాన సంఖ్యలు మిగులుతాయి. టూకీగా ఇరటోస్తనీస్ చెప్పిన ఉపాయం ఇది. పైన చూపిన వరుసలో చివరనున్న 25 ప్రధాన సంఖ్య

కాదు. కాని 5 ని లంగరుగా చేసి మరొక సారి జల్లిస్తే 25 కిందకి దిగజారిపోతుంది. ఈ జల్లెడ రూపు రేఖలని బొమ్మ 8.1 లో చూపెడుతున్నాను.

బొమ్మ 8.1 ఇరటోస్తనీస్ జల్లెడ పని చేసే తీరు

క్రీ. పూ. 300 సంవత్సరంలో యూకిలిడ్ (Euclid) రేఖాగణిత సూత్రావళి (Elements of Geometry లేదా క్లుప్తంగా Elements) అనే పేరుతో జగద్విఖ్యాతమైన పుస్తకం ప్రచురించేనాటికే ప్రధాన సంఖ్యలకి చెందిన సిద్ధాంతాలెన్నో ప్రమాణాత్మకంగా ప్రాచుర్యం పొంది ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతంగా ఉన్నాయని యూకిలిడ్ తన సూత్రావళి తొమ్మిదవ అధ్యాయంలో ఋజువు చేసి చూపించేరు. అంటే ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాని తయారు చేద్దామని సంసిద్ధమైతే అది తెమిలే పని కాదు; హనుమంతుడి తోకలా ఆ జాబితా పెరుగుతూనే ఉంటుంది.

యూకిలిడ్ తన పుస్తకంలో మరొక విషయం ఋజువు చేసేరు. ఏ సంఖ్యనైనా సరే కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్దంగా, ఒక ఏకైక (unique) పద్ధతిలో – వరుస క్రమంలో మార్పులని మినహాయించి – రాయవచ్చని ఆయన ఋజువు చేసేరు. దీనినే అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం (The Fundamental Theorem of Arithmetic) అంటారు. ఉదాహరణకి:

2 = 2 x 1

8 = 2 x 2 x 2

21 = 3 x 7

ఏదో ముత్యం మూడు ఉదాహరణలు చూపించేసి అదే సిద్ధాంతం అంటే శాస్త్రం ఒప్పుకోదు. ఉదాహరణకి 1001 ని పైన చూపిన విధంగా రాయడానికి ప్రయత్నించి చూద్దాం:

1001 = 7 x 143 = 11 x 91

ఇక్కడ ఆదిలోనే రెండు హంసపాదులు వచ్చేయి. మొదటి అభ్యంతరం ఏమిటంటే 1001 ని ఏకైకంగా కాకుండా రెండు విధాలుగా రాయడం జరిగింది. రెండో అభ్యంతరం ఏమిటంటే 143 న్నూ 91 న్నూ ప్రధాన సంఖ్యలలా అనిపించినా, నిజానికి అవి ప్రధాన సంఖ్యలు కావు; ఎందుకంటే,

143 = 11 x 13

91 = 7 x 13

వీటిని ఉపయోగించి 1001 కి కారణాంకాలని తిరగ రాద్దాం:

1001 = 7 x 11 x 13 = 11 x 7 x 13

కనుక 1001 ని మూడు ఏకైక ప్రాధమిక సంఖ్యల లబ్ధాలుగా రాయగలిగేం. కనుక మన "ఏకైక' సిద్ధాంతానికి భంగం రాలేదు. ఈ చిన్న ఉదాహరణ చెప్పే నీతి ఏమిటంటే మనం ప్రధాన సంఖ్యలతో చెంగనాలు వేస్తూన్నప్పుడూ, చెలగాటాలు చేస్తూనప్పుడు కొంచెం ఒంటి మీద తెలివితో ప్రవర్తించకపోతే తప్పులు ఒప్పులు లాగా, ఒప్పులు తప్పులు లాగా కనిపించి, పప్పులో కాలేసే ప్రమాదం ఉంటుంది.

ప్రధాన సంఖ్యల ఎడల అప్రమత్తత ఎంత ముఖ్యమో నొక్కి వక్కాణించడానికి మరొక ఉదాహరణ చూపిస్తాను.

ముందుగా 2 ప్రధాన సంఖ్య అని నిర్వచనం ప్రకారం ఒప్పేసుకుందాం. ఇప్పుడు ఈ దిగువ శ్రేణిని పరిశీలించండి:

$1 \times 1 + 1 = 2$, ప్రధాన సంఖ్య

$2 \times 1 + 1 = 3$, ప్రధాన సంఖ్య

$2 \times 3 + 1 = 7$, ప్రధాన సంఖ్య

$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$, ప్రధాన సంఖ్య

$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$, ప్రధాన సంఖ్య

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2{,}311$, ప్రధాన సంఖ్య

ఈ ఆరు సందర్భాలలోను మనం గమనించినది ఏమిటి? ఒకటి తరువాత వరుసగా వచ్చే ప్రధాన సంఖ్యలని క్రమానుగతంగా రెండేసి, మూడేసి, నాలుగేసి,_ _ _ చొప్పున తీసుకుని గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాలకి 1 కలపగా వచ్చిన సంఖ్య మరొక ప్రధాన సంఖ్యగా భాసిల్లింది. ఒక సారి కాదు, రెండు సార్లు కాదు, మూడు సార్లు కాదు, వరుసగా ఆరు సార్లు ఈ నియమానికి ఉల్లంఘన రాలేదు. కనుక ఈ నియమం సర్వకాల సర్వావస్థలోనూ పనిచేస్తుందనే నమ్మకం మనలో కలగక మానదు. ఆ సదుద్దేశంతో మనం మరొక్క మెట్టు ఎక్కి ఈ దిగువ చూపిన సమీకరణం రాసి:

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$, ప్రధాన సంఖ్యా!?

అని ఉద్ఘాటించాలని ఉబలాట పడతాం – అవతలి వాడు మన కంటె తెలివయిన ఘటం కానంతసేపూ. అవతలి వాడు కొంచెం ఎక్కాలు, లెక్కలు వచ్చినవాడైతే, వాడికి వచ్చిన నాలుగు గుణింతాలు వల్లె వేసుకుని, "అరెరె, 30031 ప్రధాన సంఖ్య ఎలా అవుతుంది, దానికి 59 న్నీ 509 న్నీ కారణాంకాలు కావా?" అని అడుగుతాడు. మనం జేబులోంచి కలనయంత్రం తీసి నాలిక కరుచుకుంటాం. మన నియమానికి పురిట్లోనే సంధి కొట్టింది!! తస్మాత్ జాగ్రత జాగ్రతః!

8.2 మెర్సెన్ సంఖ్యలు

యూరప్ లో నవజాగృతయుగం ('రినసాన్స్', renaissance) 500 సంవత్సరాల కిందట మొదలయింది. ఈ పునరుజ్జీవనానికి ఆరంభ దశలో మరిన్ మెర్సెన్ (1588–1648) అనే క్రైస్తవ ఫాదరీ ఒకాయన ఉండేవాడు. ప్రభువుకి జరపవలసిన కైంకర్యాలన్నీ జరిపిన తరువాత, తీరుబడి సమయాలలో ఈయన అంకెలతో ఆడుకునేవాడు. ఈ ఆటలలో ఒక శుభముహూర్తంలో ఒక చిరు విషయం కనిపెట్టేడు: 2 ని "కొన్ని" సార్లు వేసి, వాటిని గుణించగా వచ్చిన లబ్దంలోంచి 1 ని తీసివేస్తే మిగిలేది ప్రధాన సంఖ్య అని ఆయన ఉటంకించేడు. దీనినే గణిత పరిభాషలో ఈ దిగువ చూపినట్లు రాస్తారు:

$2^n - 1$, $n = 2, 3, 4, ...$ ప్రధాన సంఖ్య

అని రాస్తారు. ఇక్కడ n = 2 అయితే "2 ని 2 సార్లు వేసి గుణించి అందులోంచి 1 తీసెయ్యాలి" అని అర్థం. అప్పుడు ఫలితం 3 మిగులుతుంది. అదే విధంగా, $n = 3$ అయితే "2 ని 3 సార్లు వేసి గుణించి అందులోంచి 1 తీసెయ్యాలి" అని అర్థం. అప్పుడు ఫలితం 7 మిగులుతుంది. మెర్సెన్ ఫాదరీ గారు ఇలా n విలువ 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 అయిన సందర్భాలలో మాత్రమే తన సూత్రం పని చేస్తుందనిన్నీ, n విలువ 257 దాటిన తరువాత ఏమవుతుందో తనకి తెలియదనిన్నీ చెప్పి

తనువు చాలించేరు. ఋజువులు ఏవీ ఇవ్వలేదు. (మన రామానుజన్ కూడ ఇలాగే ఋజువులు ఇవ్వకుండా ఎన్నో ఉటంకింపులు చేసేడు.) ఋజువులు ఇవ్వకపోవడానికి కారణం లేకపోలేదు. ఉదాహరణకి 2 ని 257 సార్లు వేసి గుణించడం అంటే మాటలు కాదు. అది ఊహకి అందనంత పెద్ద సంఖ్య. (చదరంగం బల్ల మీద వడ్ల గింజలు పెట్టడం కథ గుర్తు చేసుకోండి.) అంత పెద్ద సంఖ్యకి కారణాంకాలు ఉన్నాయో లేదో చెప్పడం అంటే తమాషా కాదు.

దరిమిలా సా. శ. 1876 లో లూకస్ అనే ఆయన $(2^{127} - 1)$ నిజంగా ప్రధాన సంఖ్యే అని ఋజువు చేసి చూపించేరు. అప్పటి నుండి మెర్సెన్ గౌరవార్థం $(2^{n} - 1)$ వంటి సంఖ్యలన్నిటిని మెర్సెన్ సంఖ్యలు అని పిలవడం మొదలు పెట్టేరు. రాత సౌలభ్యం కొరకు పైన చూపిన సంఖ్యని M–127 అని ఆయన పేరు మీదుగా రాయడం మొదలు పెట్టేరు.

జరగవలసిన పురస్కారాలు జరిగిపోయిన తరువాత మెర్సెన్ కట్టిన భవంతికి బీటలు పడడం మొదలయింది. ఉదాహరణకి $(2^{n} - 1)$ ప్రధాన సంఖ్య అవాలంటే ఘాతంలో ఉన్న n ప్రధాన సంఖ్య అయి తీరాలని తెలిసింది. అంతే కాకుండా ఘాతంలో ఉన్న సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అయినప్పుడల్లా $(2^{n} - 1)$ ప్రధాన సంఖ్య అయి తీరాలని ఏమీ లేదని తేలగొట్టేరు. ఉదాహరణకి, ఒక కథనం ప్రకారం, సా. శ. 1903 లో ఫ్రేంక్ నెల్సన్ కోల్ అనే వ్యక్తి సభలో నిలబడి గంట సేపు "నిశ్శబ్ద ఉపన్యాసం" ఇచ్చేరుట. అయన చేసిన పనల్లా నల్లబల్ల మీద సుద్దముక్కతో $2^{67} - 1$ = 193,707,721 x 761, 838, 257, 287 = 147,573,952,589,676,412,927 అని నిరూపించేరుట! అంటే అందరూ అనుకుంటున్నట్లు $2^{67} - 1$ మెర్సెన్ సంఖ్య కాదన్నమాట!

ఏదైతేనేమి. మెర్సెన్ పేరు చిరస్థాయిగా నిలచి పోయింది. వ్రతం చెడ్డా ఫలం దక్కడం అంటే ఇదే. సా. శ. 1952 నాటికి కంప్యూటర్ల సహాయంతో M–521, M–607, M–1279, M–2203, M–2281 ప్రధాన సంఖ్యలే అని ఋజువు చేసేసేరు. సా. శ. 1999 లో M–3,021,377 కూడ ప్రధాన సంఖ్యే అని ఋజువయిపోయింది. ఇందులో మొత్తం 909,526 అంకెలు ఉన్నాయిట! ఇది 37 వ మెర్సెన్ సంఖ్య. ఈ మధ్య, 2013 లో, M–57,885,161లో 17,45,170 అంకెలు ఉన్నాయని

కనుక్కున్నారు. ఒక విధంగా చూస్తే ఇలా కంప్యూటర్లు ఉపయోగించి కనుక్కోవడం తేలికే అనిపిస్తుంది. సిద్ధాంతపరంగా ఋజువు చెయ్యడం కష్టం.

8.3 పరిపూర్ణ సంఖ్యలు లేదా సమగ్ర సంఖ్యలు

యవనులకి (గ్రీసు దేశస్థులకి) పరిపూర్ణ సంఖ్యలు (perfect numbers) అన్నా, కలుపుగోలు సంఖ్యలు (amicable numbers) అన్నా వల్లమాలిన అభిమానం. ముందుగా పరిపూర్ణ సంఖ్యలు లేదా సమగ్ర సంఖ్యలని చూద్దాం. ఉదాహరణకి 6 పరిపూర్ణ సంఖ్య. ఎందుకుట? ఈ 6 ని 1 చేత, 2 చేత, 3 చేత పరిపూర్ణంగా (అంటే, శేషం లేకుండా) భాగించవచ్చు. కనుక 1 ని, 2 ని, 3 ని 6 యొక్క క్రమ విభాజకాలు (proper divisors) అంటారు. ఇప్పుడు ఈ క్రమ విభాజకాలని కూడితే మళ్లా 6 వచ్చేసింది కదా! ఈ లక్షణం ఉన్న సంఖ్య పరిపూర్ణ సంఖ్య. అన్నిటి కంటె చిన్న పరిపూర్ణ సంఖ్య 6.

మరొక ఉదాహరణగా 28 ని తీసుకుందాం. ఈ సంఖ్య క్రమ విభాజకాలు 1, 2, 4, 7, 14 అని ఎవరికి వారే ఋజువు చేసుకొండి. ఇప్పుడు ఈ 1, 2, 4, 7, 14 లని కలపగా 28 వచ్చేసింది. కనుక 28 రెండవ పరిపూర్ణ సంఖ్య. తరువాత వచ్చే పరిపూర్ణ సంఖ్య 496. అటుపైన 8128. ఇప్పటివరకు మనకి తెలిసిన పరిపూర్ణ సంఖ్యలన్నీ సరి సంఖ్యలే అవడం గమనార్హం.

పరిపూర్ణ సంఖ్యల గురించి మనకి తెలియని విషయాలు చాల ఉన్నాయి. పరిపూర్ణ సంఖ్యలు సాంతమా? అనంతమా? పరిపూర్ణ సంఖ్యలలో బేసి సంఖ్యలు ఉన్నాయా?

8.4 అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలు

ఇప్పుడు అపురూప (unitary) పరిపూర్ణ సంఖ్యల గురించి విచారిద్దాం. ఉదాహరణకి 60 ని తీసుకుందాం. ఈ 60 ని 4 చేత, 15 చేత నిశ్శేషంగా భాగించగలం. కనుక (4,15) జంటని 60 యొక్క విభాజకాలు ('డివైజర్స్') అంటారని చెప్పుకున్నాం. మన 60 కి (3, 20), (12, 5), (1,60)

కూడ విభాజకాల జంటలే. ఈ విభాజకాలన్నిటిని వరసగా రాసి, వాటిని కూడితే, 1, 3, 4, 5, 12, 15, 20, 60 వెరసి 120. ఇది 60 కి సరిగ్గా రెండింతలు. ఈ లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలని అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలు అంటారు. ఇప్పటివరకు మనకి తెలిసిన అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలు అచ్చం ఆయిదు: 6, 60, 90, 87360, 146361946186458562560000. ఈ అపురూప పరిపూర్ణ సంఖ్యలని కనుక్కున్న ఘనత సాక్షాత్తు మన తెలుగు వాడైన ప్రొఫెసర్ మతుకుమల్లి వేంకట సుబ్బారావు (1921–2006) గారిది. ఈయన కెనడాలో ఎడ్మన్^టన్ లో పని చేసేవారు. నాకు స్వయంగా తెలిసిన వ్యక్తి. నిగర్వి!

8.5 కలుపుగోలు సంఖ్యలు

ఇప్పుడు 220 ని 284 ని తీసుకుందాం. ఈ 224 యొక్క క్రమ విభాజకాలని తీసుకుని వాటిని కూడితే 284 వస్తుంది. అలాగే 284 యొక్క క్రమ విభాజకాలని తీసుకుని వాటిని కలిపితే 220 వస్తుంది. నా మాటని నమ్మడం ఎందుకు? చదువరులు కాగితం, కలం తీసుకుని, బుర్రకి బుద్ధి చెబితే నేను చెపినది తప్పో, ఒప్పో తేలికగా నిర్ణయించవచ్చు. ఇలా పరస్పర మైత్రీభావం చూపించే సంఖ్యలని కలుపుగోలు (amicable) సంఖ్యలు అంటారు. పూర్వకాలపు యవనులకి ఈ రకం సంఖ్యలంటే పరమ ప్రీతి. యవనుల తరువాత దరిదాపు సహస్రాబ్దం పాటు ఎవ్వరికీ మరొక కలుపుగోలు సంఖ్యల జంట కనబడలేదు. తరువాత (18416, 17296) అనే జంటని పట్టుకున్నారు. విశేషం ఏమిటంటే సా. శ. 1866 లో నికోలో పోగనీనీ (Nicolo Poganini) అనే 16 ఏళ్ల ఇటలీ బాలుడు (1184, 1210) అనే జంటని కనుక్కుని అందరినీ ఆశ్చర్య చకితుల్ని చేసేడు.

ఇలా గ్రీసు దేశస్థులు నాలుగు శతాబ్దాలపాటు సంఖ్యలతో గారడీలు చేసేరు. తరువాత ఏమయిందో కాని రెండు సహస్రాబ్దాలపాటు ఏమీ జరగలేదు. ఈ రెండు వేల సంవత్సరాలని అంధకార యుగం అనవచ్చు. మన దేశంలో కూడ అంధకార యుగం శతాబ్దాలపాటు రాజ్యం ఏలింది. ప్రాచ్యులు, పాశ్చాత్యులు అనే విభేదం చూపించకుండా ఏలినాటి శని అందరినీ అప్పుడప్పుడు పట్టుకుని పీక్కు

తింటాడన్నమాట. ఇప్పుడిప్పుడే మనం ఈ తిమిరాంధకారం లోంచి లేచి, కళ్లు నులుపుకుంటూ, ఒళ్లు విరుచుకుంటూ, బయటకి రావడమా, మానడమా అనుకుంటూ, ఆవలిస్తూ ఆలోచిస్తున్నాం.

ఆధారాలు:

1. Conway, J. H. and Guy, R. K. , *The Book of Numbers*, Springer–Verlag, New York, 1996
2. http://www.mersenne.org/

9. ప్రధాన సంఖ్యలలో కవలలు

కేవలం ఆకర్షణీయంగా మాత్రమే ఉండి, భార్యకి ఉండవలసిన ఇతర లక్షణాలు (కార్యేషు మంత్రీ, క్షమయా ధరిత్రీ, వగైరా) మరేవీ లేని వ్యక్తిని ఇంగ్లీషులో "ట్రోఫీ వైఫ్" (trophy wife) అంటారు. ఇదే విధంగా "పనికొచ్చే లక్షణాలు" లేని ఒక గణితశాస్త్ర విభాగం ఉంది. దానిని శుద్ధ గణితం (pure mathematics) అంటారు. ఇందులో "బొత్తిగా పనికిమాలిన" శాఖ మరొకటి ఉంది. దానిని సంఖ్యా వాదం (number theory) అంటారు. సంఘంలో ట్రోఫి వైఫ్ ఎలాంటిదో గణితంలో సంఖ్యా గణితం అలాంటిదని కొందరు చమత్కరిస్తారు. గణితంలో సంఖ్యా గణితాన్ని అధ్యయనం చేసేవారు సౌందర్యోపాసకులు. ఆ గణితంలో వారి కంటికి కనిపించే అందమే వారికి ఆనందదాయికం. ఈ శాఖలో ఉన్న మరొక ఉపశాఖని ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) అంటారు. ఈ ప్రధాన సంఖ్యలు ఎందుకు, ఎవ్వరికి, ఎక్కడ, ఎలా ఉపయోగపడతాయో చెప్పడం అనేది చెప్పే వాడి దృక్పథం మీద, వినే వాడి దృక్పథం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. కంప్యూటర్ వలయాలలో సమాచారం ఒకచోట నుండి మరొక చోటకి రహస్య సంకేత లిపిలో పంపే కార్యక్రమాలలో ప్రధాన సంఖ్యల వాడకం విరివిగా కనబడుతోంది. ప్రయోజనాల మాట పక్కన పెడితే ఈ ఉపశాఖలో కనబడే అందం మరెక్కడా లేదేమో అనిపిస్తుంది. గణితంలో ప్రావీణ్యం లేని వారు కూడ, గణితపు లోతులని తరచి చూసే సామర్ధ్యం లేని వారు కూడ ఈ ప్రధాన సంఖ్యల అందచందాలని చవి చూడకపోతే జీవితంలో ఒక వెలితి మిగిలిపోయినట్లే. అదృష్టవశాత్తు ఈ ప్రధాన సంఖ్యలలోని అందచందాలని చవి చూసి ఆనందించడానికి గణితం లోతుల్లోకి అతిగా వెళ్ళనక్కరలేదు.

9.1 అసాధారణ సంఘటన

ఈ అంశాన్ని ఇప్పుడు, ఇక్కడ ప్రస్తావించడానికి ఒక కారణం ఉంది. ఈ మధ్య, అనగా, సా. శ. 2013 లో, గణిత ప్రపంచంలో ఒక అసాధారణమైన సంఘటన జరిగింది. ఇది ఎన్నో విధాలుగా అసాధారణం. క్రీడా రంగంలో ప్రతిభ యువ తరానికి ఎలా పరిమితమో అదే విధంగా గణిత రంగంలో ప్రతిభ బాల్యానికీ, యువతకీ పరిమితం. గణితంలో పేరు ప్రతిష్ఠలు తెచ్చుకున్న వాళ్లంతా

చిన్నతనంలోనే వికసించి పరిమళించేరు. ఒక గౌస్ అనండి, ఒక గేల్వా అనండి, ఒక రామానుజన్ అనండి, ఒక మంజుల్ భార్గవ అనండి – వీరంతా పాతికేళ్లు నిండే లోపునే ప్రపంచ ప్రఖ్యాతి పొందేరు. ఉదాహరణగా 1985 లో తీసిన ఈ దిగువ ఫొటోలో (బొమ్మ 9.1 చూడండి) కొమ్ములు తిరిగిన పాల్ ఎర్డిష్ (Paul Erdős) కేవలం 10 ఏళ్ల టెరెన్స్ టావ్ (Terrance Tao) తో గణితంలో ఎదురయే ఒక సూక్ష్మాన్ని చర్చిస్తూన్న దృశ్యం చూడండి. దరిమిలా, 2007 లో, టావ్ కి, అతను సంఖ్యాశాస్త్రంలో చేసిన పనికి గుర్తింపుగా, ప్రతిష్ఠాత్మకమైన ఫీల్డ్స్ మెడల్ (Fields Medal) వచ్చింది. ఈ బాల మేధావి ఇప్పుడు కేలిఫోర్నియా విశ్వవిద్యాలయం, లాస్ ఏంజిలిస్ లో, ఆచార్య పదవి అలంకరించి ఉన్నాడు.

బొమ్మ 9.1 ఎర్డిష్ తో దీర్ఘ చర్చలో ఉన్న బాల టెరెన్స్ టావ్

ఇలా పరిమళించిన వారంతా పాతిక, ముప్పయి సంవత్సరాల లోపునే వారు చేరుకోవలసిన శిఖరాగ్రాలు చేరుకున్నారు. ఏభయ్యవ పడి దాటిన తరువాత గణిత శాస్త్రపు పురోగతికి దోహదం చేసిన వ్యక్తులు దరిదాపుగా లేరనే చెప్పాలి. అటువంటిది, 2013 లో, ఏభయ్ ఏళ్లు దాటిన "వయోవృద్ధుడు," అంతవరకు గణిత ప్రపంచానికి బొత్తిగా పరిచయం లేని ఒక "అనామకుడు," చదువు అయిన తరువాత ఉద్యోగం దొరకక చిల్లర పనులు చేసి పొట్ట నింపుకున్న ఒక "అప్రయోజకుడు" అకస్మాత్తుగా తారాపథంలో నవ్యతారలా ఒక్క వెలుగు వెలిగిపోయి అందరినీ ఆశ్చర్యచకితులని చేసిన వయినం ఇక్కడ చెప్పబోతున్నాను.

మన కథానాయకుడి పేరు ఈటాంగ్ జాంగ్ (జ. 1955). చైనాలో ఉన్నత పాఠశాలలో ఉన్నప్పుడు ఆల్జీబ్రా ని చూసి గాభరా చెందిన ఈ వ్యక్తి పర్డ్యు (Purdue) యూనివర్సిటీ నుండి 1991 లో పి. ఎచ్. డి. పట్టా పుచ్చుకున్నాడు. ఆయనకి మార్గదర్శిగా ఉన్న ఆచార్యుడితో స్పర్ధలు వచ్చిన కారణంగా, సిఫార్సు ("రికమెండేషన్" ఉత్తరం) లేనందువల్ల జాంగ్ కి ఎక్కడా ఉద్యోగం దొరకలేదుట. ఈ పంచనీ ఆ పంచనీ చేరి పొట్టపోసుకుంటూ, తాడు తెగిన గాలిపటంలా, ఉన్న జాంగ్ ని చూసి జాలిపడి ఒక స్నేహితుడు యూనివర్శిటీ అఫ్ నూ హేంప్‌షైర్ లో, 1999 లో, ఉపన్యాసకుడు ("లెక్చరర్") ఉద్యోగం ఇప్పించేడు. అక్కడ "కేలుక్యులస్" పాఠాలు చెప్పుకుంటూ, 2001 లో ఒక పరిశోధనా పత్రం ప్రచురించేడు కాని అది ఆయన, ఆ పత్రికా సంపాదకుడు తప్ప మరెవ్వరూ చదివిన దాఖలాలు లేవు. తరువాత 2013 లో ప్రచురించిన రెండవ పత్రంతో దిక్కులు పిక్కటిల్లేలా జాంగ్ పేరు గణిత ప్రపంచంలో మారుమోగిపోయింది. జాంగ్ పరిష్కరించిన సమస్యని నియమిత విరామ సమస్య (the bounded gap problem) అని పిలుస్తారు. ఇది ప్రధాన సంఖ్యల అధ్యయనంలో తారసపడే అతి క్లిష్టమైన సమస్య. పరిష్కారం లేకుండా రెండు శతాబ్దాల నుండి వేధిస్తూన్న సమస్య!

9.2 ప్రధాన (అభాజ్య) సంఖ్యలు

ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) అనేవి 1 చేత గాని, తమ చేతే కాని మాత్రమే నిశ్శేషంగా భాగించడానికి లొంగేవి అని నిర్వచనం. ఉదాహరణకి 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., వగైరాలన్నీ

ప్రధాన సంఖ్యలే. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే ప్రధాన సంఖ్యలకి భాజకాలు (divisors) లేవు. ఈ నిర్వచనంతో సరి సంఖ్యలు (2 తప్ప) ప్రధాన సంఖ్యలు కావు. అదే విధంగా 3 చేత, 4 చేత, 5 చేత, ..., భాగించబడేవి ఏవీ ప్రధాన సంఖ్యలు కాజాలవు. ఇలా మినహాయించుకుంటూ పోగా మిగిలేవే ప్రధాన సంఖ్యలు.

వీటి గురించి పురాతన కాలంలో గ్రీకులకి తెలుసు. పైథాగరస్ (Pythagoras) కాలంలో (క్రీ. పూ. 500 – 300) వీటికి ఒక రకం పవిత్రత అంటగట్టేరు. యూక్లిడ్ రోజుల నాటికి (క్రీ. పూ. 300) ప్రధాన సంఖ్యల గురించి మనకి ఎన్నో విషయాలు తెలిసిపోయాయి. యూక్లిడ్ తన "ఎలిమెంట్స్" తొమ్మిదవ పుస్తకంలో ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతమైనన్ని ఉన్నాయని ఋజువు చేసేడు. యూక్లిడ్ అంకగణితానికి మూల స్తంభం అనదగ్గ మరొక సిద్ధాంతాన్ని కూడ ఋజువు చేసేడు: ప్రతి పూర్ణాంకాన్ని (1 ని మినహాయించి) ఏకైక ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధం (product) గా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి 6 = 2 x 3. మరొక ఉదాహరణ 42 = 2 x 3 x 7. కాని 60 కి 2, 3, 10 ప్రధాన కారణాంకాలు కావు. కానీ 60 ని కూడ ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయవచ్చు: 60 = 2 x 2 x 3 x 5. నిజానికి "ఏ పూర్ణ సంఖ్యని అయినా సరే కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్దంగా రాయవచ్చు" అని ఋజువు చెయ్యవచ్చు.

రెండు ప్రధాన సంఖ్యలని – ఎంత పెద్దవైనా సరే – కనుక్కోవడం పెద్ద కష్టం కాదు కాని, ఒక సంఖ్యకి ప్రధాన సంఖ్యలయిన కారణాంకాలు (prime factors) కనుక్కోవడం చాల కష్టం. అంతర్జాలంలో వార్తలని సురక్షితంగా పంపడానికి ఈ లక్షణం బాగా ఉపయోగపడుతుంది. వివరాలు చెప్పుకుంటూ పోతే దారి తప్పుతాం. ప్రధాన సంఖ్యలు మన జీవితంలో ఉపయోగపడే సందర్భం ఇదొకటి అని చెప్పుకోడానికి ఉదాహరణగా ఈ విషయం ప్రస్తావించేను.

క్రీ. పూ. 200 నాటికి ఇరాటోస్తనీస్ (Eratosthenes) అనే గ్రీకు ఆసామీ అంకెలన్నిటిని "ఒక జల్లెడలో వేసి జల్లిస్తే" పైన ప్రధాన సంఖ్యలు మాత్రమే మిగిలే పద్ధతిని కనిపెట్టేడు. ఈనాటి వరకు మనకి తెలిసిన విషయాలు అన్నీ స్మరించుకుంటూ పోడానికి ఇది స్థలమూ కాదు, వేళా కాదు. కాని కొన్ని ముఖ్యమైన విషయాలని టూకీగా చెప్పుకొస్తాను.

9.3 నియమిత విరామ సమస్య (Bounded Gap Problem)

ఒక సరళరేఖ మీద సమాన దూరాలలో చుక్కలు పెట్టి, వాటి పక్క 0, 1, 2, 3, ..., అనుకుంటూ నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలని సూచించినప్పుడు దానిని "సంఖ్యా రేఖ" (number line) అంటారు. ఈ సంఖ్యా రేఖ మీద ప్రధాన సంఖ్యలని, మాటవరసకి, ఎర్ర రంగులో రాసేం అనుకుందాం. అప్పుడు గీత మొదట్లో చాల ఎర్ర రంగు సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 47 అనే పదహారు సంఖ్యలు 50 కంటె చిన్నవయిన ప్రధాన సంఖ్యలు. సంఖ్యా రేఖ మీద వంద వరకు వెళితే, అంటే 1 నుండి 100 మధ్యలో, ఇరవై అయిదు ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. లెక్కించి చూసుకొండి. వెయ్యి వరకు వెళితే 168 ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. అంటే, సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపించడం పలచబడుతుంది, లేదా ప్రధాన సంఖ్యల సాంద్రత తగ్గుతుంది. ఈ పలచబడడం గురించి చిన్న ఉపమానం చెబుతాను.

ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలతోటే వివాహాలు చేసుకుంటాయని అనుకుందాం. అప్పుడు సంఖ్యా రేఖ మొదట్లో ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలకి సంబంధాలు దొరకడం తేలిక – పక్క పక్కనే సంబంధాలు దొరుకుతాయి. సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు పలచబడతాయి కనుక అక్కడ ఉన్న వారు సంబంధాలకోసం ఇరుగునా, పొరుగునా చూస్తే దొరకడం కష్టం; కావలసిన లక్షణాలు ఉన్న సంబంధం కోసం “దేశాంతరాలు” దాటి పోవాలి. ఉదాహరణకి "గూగోల్ ప్లెక్స్" (అంటే, 10 గూగోల్ సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చిన సంఖ్య) దగ్గర ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యకి సంబంధం కావాలంటే ఇటూ, అటూ "గూగోల్" దూరం వెతక వలసి రావచ్చు. (గూగోల్ అంటే 1 తరువాత 100 సున్నలు, "గూగోల్ ప్లెక్స్" అంటే 1 తరువాత గూగోల్ సున్నలు.)

ఇక్కడ గమనించవలసిన విషయం ఏమిటంటే సంఖ్యా రేఖ మీద అనంతమైన దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయన్నది ఒక అంశం. అంతే కాదు అనంతంగా ఉన్న పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని కేవలం ప్రధాన సంఖ్యలు మాత్రమే ఉపయోగించి పుట్టించవచ్చు. (The whole

number line can be produced using nothing but primes.) ఇటువంటి లక్షణాలు ఉండబట్టే ఈ క్షేత్రాన్ని దున్నుతూన్న కొద్దీ వజ్రాలు పుట్టుకొస్తున్నాయి.

ఇప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేకమైన ప్రధాన సంఖ్యల పేర్లు చెబుతాను. వీటి వెనక ఉండే గణిత సూత్రాలు, ఋజువులు అర్థం కాకపోయినా పరవా లేదు.

(1) ప్రధాన సంఖ్యలు (2 ని మినహాయించి) అన్నీ బేసి సంఖ్యలే.

(2) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 2 అయితే వాటిని "కవల ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా "కవలలు" (twins) అంటారు. ఉదా: (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); వగైరా. ఈ వరుస క్రమంలో తరువాత వచ్చే కవలలు మరి కొన్ని చెప్పుకోగలరా? ప్రయత్నించండి, కష్టం కాదు.

(3) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 4 అయితే వాటిని "జ్ఞాతి ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా జ్ఞాతులు (cousins) అంటారు. ఉదా: (3,7); (7,11); (13,17). మరికొన్ని మీరు రాసి చూడండి.

(4) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 6 అయితే వాటిని “షష్ఠ్యంతర ప్రధాన సంఖ్యలు" అనొచ్చు. లేదా షష్ఠ్యంతరాలు. లేటిన్ లో 6 ని sex అంటారు కనుక వీటిని ఇంగ్లీషులో “sexy ప్రధాన సంఖ్యలు” అంటారు. ఉదా: (5, 11); (7, 13); (11,17). మరి కొన్ని షష్ఠ్యంతరాలు మీరు రాసి చూడండి.

కవలలనీ, జ్ఞాతులనీ, షష్ఠ్యంతరాలునీ, ..., వగైరాలని గుత్తగుచ్చి “జంట” ప్రధాన సంఖ్యలు అనొచ్చు. ఇక్కడ “కవల” కీ “జంట” కీ తేడా ఉంది. జంట ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం మనం నిర్దేశించి చెప్పవచ్చు కాని “కవల” సంఖ్యల మధ్య దూరం ఎప్పుడూ రెండే.

కాలక్షేపానికీ, మరికొన్ని ఆసక్తికరమైన విషయాలు:

(5) ఒక ప్రధాన సంఖ్యలో ఉన్న అంకెలని ఏ విధంగా అమర్చినా తిరిగి ప్రధాన సంఖ్యే వస్తే వాటిని నిరపేక్ష (absolute) ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు. ఉదా: 199, 919, 991. వెయ్యి లోపున 21 నిరపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, వగైరా. మిగిలిన తొమ్మిదింటిని మీరు కనుక్కొండి.

(6) కచిక (palindrome) ప్రధాన సంఖ్యకి ఒక ఉదాహరణ: 700666007. ఇది ఎటు నుండి చదివినా ప్రధాన సంఖ్యే! మధ్యలో 666 ఉండడం వల్ల దీనిని "సైతాను" (beastly) ప్రధాన సంఖ్య అని కూడ అంటారు. (క్రైస్తవ మతంలో సైతానుని 666 తో సూచిస్తారు.)

(7) ఒక సంఖ్యలో అంకెలని గుండ్రంగా చక్రంలా అమర్చిన తరువాత ఎక్కడనుండి చదివినా ప్రధాన సంఖ్యే వస్తే దానిని చక్రీయ (cyclic) ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదా: 1193, 1931, 9311, 3119 అనేవి నాలుగంకెల చక్రీయ ప్రధాన సంఖ్యలు.

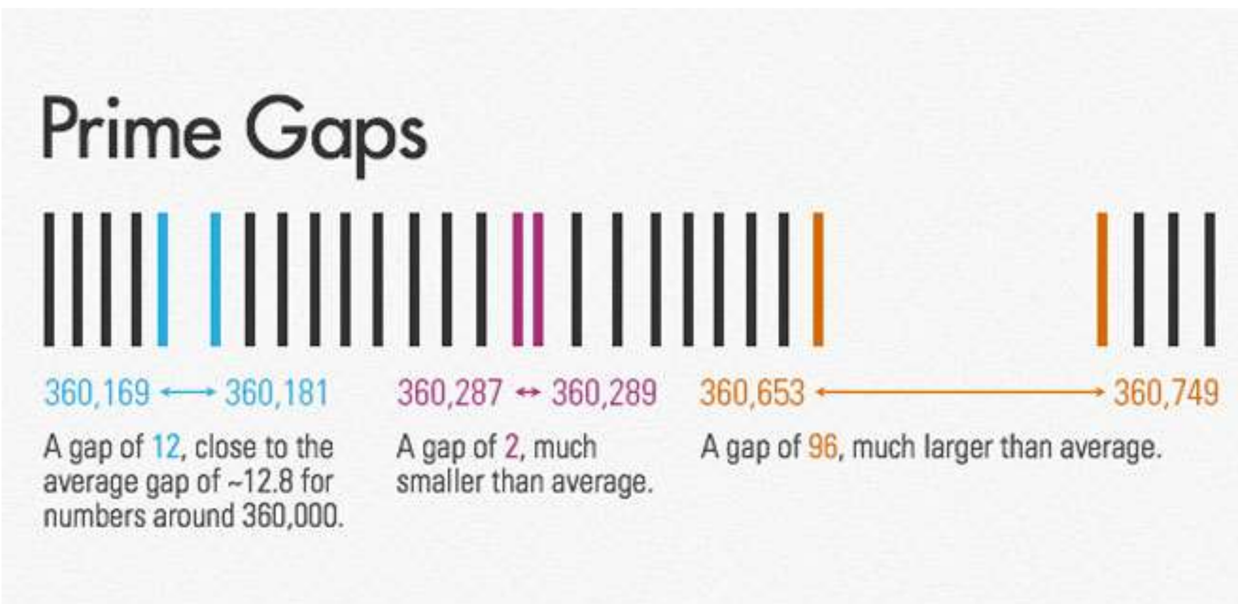
(8) ఒక సంఖ్యలో అన్నీ గుండ్రటి ఒంపు తిరిగిన అంకెలు (అనగా 0, 3, 6, 9) మాత్రమే ఉంటే దానిని ఒంపుల ప్రధాన సంఖ్య (curved-digit prime) అంటారు.

(9) ఒక ప్రధాన సంఖ్యలో అంకెలని ఒకటీ, ఒకటీ మినహాయించుకుంటూ పోతూన్నప్పుడు మిగిలినది ప్రధాన సంఖ్యే అయితే దానిని "మినహాయింపు" (deletable) ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదా: 1997. ఎడమ పక్క నుండి వరుసగా 1, 9, 9 మినహాయించగా మిగిలిన 997, 97, 7 ప్రధాన సంఖ్యలు.

(10) "క్యూబన్" (Cuban) ప్రధాన సంఖ్యలకీ, క్యూబా దేశానికి ఏ విధమైన సంబంధము లేదు. ఇక్కడ "క్యూబన్" అంటే "క్యూబ్" (cube) కి సంబంధించిన అని అర్థం. వీటిని మనం “ఘన ప్రధాన సంఖ్యలు” లేదా ఘనాపాటీలు అనో అనొచ్చు.

ఇలా సరదా కబుర్లు చాల సేపు చెప్పుకోవచ్చు కాని ముందుకి కదులుదాం.

ఈ వ్యాసానికి ముఖ్య కారణం చర్చించే ముందు మరొక్క సంగతి తెలుసుకుందాం. సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యల తరచుదనం (frequency) లేదా సాంద్రత (density) తగ్గిపోతుంది అని కదా మొదట్లో చెప్పుకున్నాం; అంటే, వాటి మధ్య ఖాళీ లేదా మొర్రి లేదా విరామం (gap) పెరుగుతూ కనిపిస్తుంది. ఈ పెరుగుదలలో ఏదైనా ఒక బాణీ ఉందా అనేది ఆసక్తికరమైన పరిశోధనా అంశమే! ప్రస్తుతానికి ఆ విషయాన్ని కూడ పక్కకి పెట్టి మరొక సంబంధిత అంశాన్ని పరిశీలిద్దాం. సిద్ధాంతపరంగా లెక్క కట్టినప్పుడు 360,000 చుట్టుపట్ల ఈ విరామం సగటున 12.8 “అంకెల దూరం” ఉంటుంది. (గణిత పరిభాషలో చెప్పాలంటే, ఒక సంఖ్య N అయితే ఆ చుట్టుపట్ల విరామం విలువ సగటున “నేచురల్ లాగరిథం అఫ్ N,” (ln N), అయి ఉంటుంది.) అనగా, ఎక్కడ చూసినా ఈ సగటు విలువ కంటె ఎక్కువలు, తక్కువలు కూడ కనిపిస్తూనే ఉంటాయి. ఉదాహరణకి సంఖ్యా రేఖ మీద 360,000 చుట్టుపట్ల వచ్చే ఈ ప్రధాన సంఖ్యల జంటలని బొమ్మ 8.2 లో చూడండి.



బొమ్మ 9.2 ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం

(1) 360,169 & 360,181 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 12. ఇది సగటుకి దగ్గరగా ఉంది.
(2) 360,287 & 360,289 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 2. కనుక ఇవి కవలలు. ఈ విరామం సగటు కంటె బాగా తక్కువగా ఉంది.
(3) 360,653 & 360,749 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 96. ఈ విరామం సగటు కంటె బాగా ఎక్కువగా ఉంది.

కనుక ప్రధాన సంఖ్యల గురించి ఏది చెప్పినా ఆషామాషీగా చెబితే కుదరదు; కొంచెం జాగ్రత్తగా ఆలోచించి చెప్పాలి.

సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయని యూక్లిడ్ ఏనాడో అన్నాడు కదా. కాని ఆయన కవల ప్రధాన సంఖ్యల గురించి ఏమీ చెప్పలేదు. గణితశాస్త్రంలో ఒక శిష్టాభిప్రాయం (conjecture) – అంటే, ఇంకా ఋజువు కాని ఫలితం – ప్రకారం ఇటువంటి కవల ప్రధాన సంఖ్యలు కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయిట. ఆ మాటకొస్తే జ్ఞాతి ప్రధాన సంఖ్యలు, షష్ఠ్యంతర ప్రధాన సంఖ్యలు,....., వగైరాలు కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయిట.

ఇప్పుడు మే నెల 2013 లో ఈటాంగ్ జాంగ్ ఈ దిశలో అధిరోహించిన శిఖరం గురించి తెలుసుకుందాం. ఈయన ఆవిష్కరించిన కొత్త విషయం ఏమిటంటే సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా "ప్రధాన సంఖ్యలు 'వాటి మధ్య కనిపించే విరామం (gap) ఒక పరిమితమైన అవధి దాటకుండా' అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయి" అని. ఎన్నిట? అనంతమైనన్ని! (ఈ ఫలితాన్ని ఇంగ్లీషులో, The number of prime pairs that are less than a bound apart is infinite అని రాయవచ్చు.) దీని సారాంశం అవగాహన కావాలంటే గణిత శాస్త్రపు లోతులలోకి కొద్దిగానైనా వెళ్లాలి. సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయి అన్న విషయం మనందరికీ తెలిసిన విషయమే. ఇప్పుడు జాంగ్ వచ్చి "ఒక ప్రధాన సంఖ్యకి, దాని తరువాత

కనిపించే ప్రధాన సంఖ్యకి మధ్య వచ్చే విరామం నియమితం" (bounded) అని అన్నారు. అంటే, ఎంత దూరం వెళ్లినా ఆ ఖాళీ విలువ ఒక అవధి దాటకుండా పరిమితంగానే ఉంటుంది కాని ఎప్పటికీ అనంతం కాదు. ఇంకా నిర్దిష్టంగా చెప్పాలంటే, ఆ విరామం విలువ 70,000,000 దాటదు." ఇది సామాన్యులకి అందుబాటు కాని విషయమే అయినా గణిత ప్రపంచంలో పతాక శీర్షిక అయి కూర్చుంది.

బొమ్మ 9.3 ఈటాంగ్ జాంగ్

జాంగ్ చూపించిన దారి వెంట తర్కించుకుంటూ వెళితే మరొక ఉపయుక్తమైన ఫలితం వెంటనే దొరికింది. పైన చెప్పిన అనంతమైన శ్రేఢిలో వచ్చే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య వచ్చే విరామానికి ఒక గరిష్ఠ అధో అవధి (greatest lower bound లేదా infimum) ఉందిట. అది 70,000,000 కంటె ఖచ్చితంగా తక్కువేనట. (అనగా, ఇంగ్లీషులో చెప్పాలంటే the number of prime pairs that are less than 70 million units apart is infinite.) ఇదే విషయాన్ని గణిత పరిభాషలో మళ్లా చెబుతాను. ఉదాహరణకి p_n, p_{n+1} అనేవి ఒకదాని తరువాత మరొకటి వచ్చేవి అయిన రెండు ప్రధాన సంఖ్యలు అనుకుందాం. అప్పుడు $p_{n+1} - p_n = g_n$ అనేది ఈ రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య ఉండే విరామం (gap). ఈ విరామం విలువ అనంతం కాదు అన్నది మొదటి ఫలితం. ఈ విరామం విలువ 70 మిలియన్లు కంటె తక్కువ అన్నది విశేషాంశం. ఈ సందర్భంలో ఈ 70,000,000 ని అవధి (bound) అంటారు. ఇదే విషయాన్ని గణిత పరిభాషలో ఈ దిగువ అసమీకరణం (inequality) ద్వారా చెప్పవచ్చు: limit as *n* goes to infinity of the infimum of g_n is

less than 70 million. ఇదే విషయాన్ని సంప్రదాయిక గణిత పరిభాషలో రాసినప్పుడు బొమ్మ 9.4 లో చూపినట్లు ఉంటుంది:

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) < N \quad \text{with} \quad N = 7\times 10^7,$$

బొమ్మ 9.4 ఈటాంగ్ జాంగ్ సాధించిన ఫలితం

(ఇక్కడ "ఇన్^ఫిమమ్" (infimum) అన్న మాటకి అర్థం తెలిస్తే కాని ఈ అసమీకరణం పూర్తిగా బోధపడదు. ఇంగ్లీషులో, the infimum of a set of numbers is the largest number that is less than or equal to all the numbers in the set.) ఒక విధంగా చూస్తే "ఇన్^ఫిమమ్" కీ "మినిమమ్" (కనిష్ఠ) కీ పోలిక ఉంది. కాని కొన్ని సందర్భాలలో కనిష్ఠ ("మినిమమ్") అంశం కావాలని అడిగితే సమాధానం దొరకదు. ఉదాహరణకి "ధన నిజ సంఖ్యలు లో ఏది కనిష్ఠం?" అంటే చెప్పలేము. కాని "ధన నిజ సంఖ్యలు" అన్నీ –3 కంటే పెద్దవే, –2 కంటె పెద్దవే, –1 కంటె పెద్దవే –0.5 కంటె పెద్దవే, –0.1 కంటె పెద్దవే, 0 కంటె పెద్దవే అనుకుంటూ వెళితే ఈ –3, –2, –1, –0.5, ...–0.1,... , 0 లలో అన్నిటి కంటె పెద్దదయిన అధో అవధి – గరిష్ఠ అధో అవధి (greatest lower bound) 0 అవుతుంది. మరొక ఉదాహరణగా {2,3,4} అనే సమితికి 2 గరిష్ఠ అధో అవధి; 1 "అధో అవధి" మాత్రమే అవుతుంది కాని గరిష్ఠ అధో అవధి కాజాలదు.)

ఇప్పుడు జాంగ్ సాధించిన ఫలితాన్ని మరొక విధంగా చెప్పి చూస్తాను. ఒక అవధిని తీసుకొని, సంఖ్యలను ఎంత పెంచుకొంటూ పోయినా, తమ మధ్య దూరం ఆ అవధిని మించకుండా ఉండే ప్రధాన జంటలు దొరుకుతాయా లేదా అన్నది ఇక్కడి ప్రశ్న. దొరుకుతాయి అన్నది జాంగ్ నిరూపించారు. ఆ అవధి 70,000,000 కన్నా తక్కువని కూడా నిరూపితమైంది.

గణితంలో ఇటువంటి అవధులని నిర్ణయించడం చాల ముఖ్యమైన పని. ఈ ఫలితాన్ని ఆసరాగా చేసుకుని మరికొందరు ఈ అవధి (bound) ని 246 కి, తరువాత 16 కి కుదించగలిగేరు. అనగా, ఆ

అవధి 16 కన్నా తక్కువ అని కూడా నిరూపించారు! అంటే ఎంత పెద్ద సంఖ్య తీసుకొన్నా, ఆ సంఖ్య కన్నా పైన – '16 కంటె తక్కువ దూరం ఉన్న' ప్రధాన జంటలు మనకి దొరుకుతాయి.
మరెవ్వరైనా ఈ అవధిని 2 కి కుదించగలిగితే ఎప్పటినుంచో వాడుకలో ఉన్న కవల ప్రధాన సంఖ్యల శిష్టాభిప్రాయం (Twin Prime Conjecture) నిజం అవుతుంది. ఏమిటా శిష్టాభిప్రాయం? కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అన్నది.

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అని నిర్ణయం జరిగిపోతే అదే తర్కంతో జ్ఞాతులు, షష్ఠ్యంతరాలు, వగైరాలు అన్నీ కూడ అనంతమే అని ఋజువు చెయ్యటం తేలిక. అంటే, మీరు ఏ సరి సంఖ్య ఇచ్చినా సరే ఆ సంఖ్య నిర్దేశించిన దూరంలో ఉండే జంట ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అన్న మాట!

కుతూహలం ఉన్న వారికి $2,003,663,613 \times 2^{195,000} - 1$ and $2,003,663,613 \times 2^{195,000} + 1$ అనేవి కవల ప్రధాన సంఖ్యలకి మరొక ఉదాహరణ. అలాగే $3,756,801,695,685 \times 2^{666,689} - 1$ and $3,756,801,695,685 \times 2^{666,689} - 1$ అనేవి కవలలకి మరొక ఉదాహరణ.

ఇంత కథా చెప్పి జాంగ్ ఈ ఫలితాన్ని ఎలా సాధించేరో చెప్పనేలేదు కదూ? ఇరాటోస్తనీస్ (Eratosthenes) జల్లెడ వంటి సాధనాన్నే ఈయనా ఉపయోగించేరు. ఆ వివరాలు అన్నీ ఇక్కడ చెబుతూ కూర్చుంటే ఇది లెక్కల పాఠంలా తయారయే ప్రమాదం ఉంది; కావలసిన వారు ఈ దిగువ ఇచ్చిన ఆధారాలు చదవండి.

కృతజ్ఞతలు:

ఈ వ్యాసం ఈమాట అంతర్జాల పత్రికలో ప్రచురణ అయే ముందు సంపాదకుడు శ్రీ మాధవ్ మాచవరం అందించిన సహాయానికి, ప్రచురణ పొందిన తరువాత పాఠకుల నుండి వచ్చిన అనూహ్యమైన స్పందన నన్ను చకితుణ్ణి చేసింది. నా వ్యాసాన్ని చదివి మెచ్చుకున్నవారందరికీ ఒకొక్క నమస్కారం; తప్పులు ఎత్తి చూపిన పాఠక వర్గానికి వెయ్యి నమస్కారాలు! కేవలం భాషానువాదానికి

సంబంధించిన తప్పులని ఎత్తి చూపిన వారు కొందరైతే, గణితపరంగా, మౌలికమైన తప్పులని పట్టి, సవరించిపెట్టినవారు మరికొందరు. వీలయినంత వరకు తప్పులని సరిదిద్దేను. ఈమాట చరిత్రలో – నా అనుభవంలో – ఇటువంటి ప్రక్రియ జరగడం ఇదే మొదటిసారేమో. గణితంలోని మూల భావాలని ఇంగ్లీషు నుండి తెలుగులోనికి దింపినప్పుడు నా తెలుగులో ఇంకా వెలితి కనిపించవచ్చు. రెండు విషయాలు జ్ఞాపకం పెట్టుకోమని పాఠకలోకానికి మనవి. ఒకటి, ఇది గణితంలో నిష్ణాతులైన పండితులని ఉద్దేసించి రాసినది కాదు; సామాన్య పాఠకులకి అర్థం అయే రీతిలో పదార్థాన్ని పరిచయం చెయ్యాలని చేసిన ప్రయత్నం. రెండు, తెలుగులో ఇటువంటి వ్యాసాలు రాయడానికి ఒరవడి అంటూ ఒకటి స్థిరపడలేదు. కనుక చదువుతూన్నప్పుడు మీకు కనిపించే లొసుగులు రాస్తున్నప్పుడు నాకు కనిపించవు. అందుకని పాఠకులందరూ ఇదే నిష్టతో నా వ్యాసాలని చదివి మీమీ అమూల్య అభిప్రాయాలు తెలియజేస్తూ ఉండండి.

ఆధారాలు:

1. Maggie McKee, “First proof that infinitely many prime numbers come in pairs: Mathematician claims breakthrough towards solving centuries-old problem,” *Nature: Breaking News*, 14 May 2013

2. Zhang, Yitang. "Bounded gaps between primes," *Annals of Mathematics* (Princeton University and the Institute for Advanced Study). Retrieved August 16, 2013. http://annals.math.princeton.edu/2014/179-3/p07

3. Erica Klarreich, “Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap,” *Quanta Magazine*, May 19, 2013, https://www.quantamagazine.org/20130519-unheralded-mathematician-bridges-the-prime-gap/

4. Jordan Ellenberg, The Beauty of Bounded Gaps: A huge discovery about prime numbers — and what it means for the future of mathematics, *Math Horizons*, Sep 2013, pp 5–7, www.maa.org/mathhorizons
5. Erica Klarreich, "Mathematicians Make a Major Discovery About Prime Numbers," *Quanta Magazine*, Dec 22, 2014,
https://www.quantamagazine.org/
6. Alec Wilkinson, "The Pursuit of Beauty: Yitang Zhang Solves a Pure–math Mystery," *The New Yorker*, Feb 2, 2015,
http://www.newyorker.com/magazine/2015/02/02/pursuit-beauty
7. Twin Prime Conjecture, Encyclopedia Britannica,
http://www.britannica.com/topic/twin-prime-conjecture
8. ఉపాధ్యాయుల వేంకట సత్యనారాయణ, "కచిక పదాలు," తెలుగు వెలుగు, తానా సభల ప్రత్యేక జ్ఞాపిక, పుటలు 105–107, 1985
9. వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు, ప్రధాన సంఖ్యలలో కవలలు, ఈమాట అంతర్జాల పత్రిక, జూలై 2015,
http://eemaata.com/em/issues/201507/6980.html

10. రీమాన్ శిష్టాభిప్రాయం

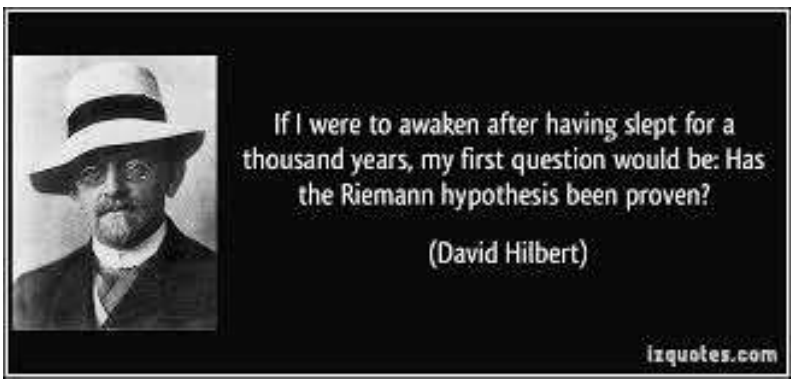
పైసా ఖర్చు లేకుండా మిలియన్ డాలర్లు సంపాదించే ఉపాయం చెబుతాను, వింటారా?
"అంత తేలికైతే మీరే ఆ ఉపాయం వాడుకో వచ్చు కదా?" అని మీరు అడగొచ్చు.
"తేలిక అన లేదు. 'కానీ ఖర్చు లేకుండా' అన్నాను. లాటరీ టికెట్టు కొనక్కరలేదు, వేగస్ కి వెళ్లి వేలు తగలేసుకు రానక్కరలేదు. కడుపులో చల్ల కదలకుండా ఇంట్లో కూర్చుని సంపాదించే ఉపాయం."
"చెప్పండి, అయితే!"
"రీమాన్ ఉటంకించిన శిష్టాభిప్రాయం (conjecture) ఒప్పే" అని ఋజువు చేస్తే క్లే మేథమేటికల్ ఇన్స్టిట్యూట్ (Clay Mathematical Institute) వారు బిళ్ల కుడుముల్లాంటి డాలర్లు – మిలియను డాలర్లు – పట్టుకొచ్చి ఒళ్లో పోస్తామని సా. శ. 2000 లో ప్రకటన చేసేరు.

"ఏమిటా శిష్టాభిప్రాయం?"

"జీటా ప్రమేయం యొక్క శూన్యస్థానాలు (zeros of the zeta function) లేదా మూలాలు (roots) అన్నీ (నిజ, ఋణ రేఖ మీద కనబడే సాధారణ మూలాలని మినహాయించి) సంకీర్ణ లేదా జంట తలంలో (అనగా, complex plane లో) x = ½ అనే రేఖ మీదే గుమిగూడి ఉన్నాయి" అని ఋజువు చెయ్యాలి. ఇది నిజమే సుమా అని రీమాన్ ఒక అమూల్య అభిప్రాయం వెలిబుచ్చేరు – ఋజువు చెయ్యకుండా! మనకి ఇప్పుడు ఆ ఋజువు కావాలి.
ఈ అభిప్రాయం నిజమే అని ఋజువు చేసిన వారికి మిలియను డాలర్లు బహుమానం ఇచ్చేస్తారు. అంతటితో పురస్కార పరంపర ఆగిపోదు. ఏదో పెద్ద విశ్వవిద్యాలయం వారు ఆచార్య పదవి అంటగడతారు. "నీ తెలివిని, నా అందాన్ని పుణికిపుచ్చుకుని పిల్లలు పుట్టొచ్చు కదా" అని హా(బా)లివుడ్ తార పెళ్లి ప్రతిపాదిస్తే, మిలియను డాలర్లతో పాటు స్వర్గ ద్వారాలు కూడ తెరుచుకోవచ్చు!

సమస్య చెప్పేసి పారిపోతే ఏమి మర్యాదగా ఉంటుంది? పరిష్కారానికి దారి కూడ చూపుతాను. ఏ పుట్టలో ఏ పాము ఉందో?

అంచెలంచెల మీద లోతుకి తీసుకు వెళతాను. గణితంలో సంప్రదాయికంగా వాడే సంకేతాలతో పరిచయం ఒక మోతాదు, కలన గణితంతో పరిచయం ఒక మోతాదు, ఉత్సాహం ఒక మోతాదు ఉంటే నేను చెప్పేది అర్థం చేసుకుందుకి పెద్దగా పాండిత్యం అక్కరలేదు. సమస్య అర్థం అయిన తరువాత, దానిని పరిష్కరించి, మిలియను డాలర్లు కొట్టేయడానికి కొంచెం లోతుగానే పాండిత్యం ఉండాలి (బొమ్మ 10.1 చూడండి).

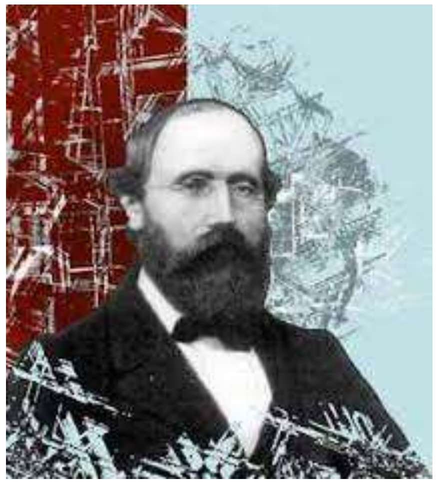


బొమ్మ 10.1 రీమాన్ వెలిబుచ్చిన శిష్టాభిప్రాయం యొక్క ప్రాముఖ్యతని గుర్తిస్తూ డేవిడ్ హిల్బర్ట్ ఉటంకించిన అభిప్రాయం.(రీమాన్ వాడిన 'హైపాథసిస్' అన్న మాట నేను వాడుతున్న 'కంజెక్చర్' అన్న మాట దరిదాపుగా సమానార్థకాలే)

10.1 చారిత్రక నేపథ్యం

రీమాన్ గురించి ఒక మాట. రీమాన్ (Georg Friedrich Bernhard Riemann, September 17, 1826 – July 20, 1866) తన 28 వ ఏట, అనగా 1854లో, చేసిన ప్రసంగాన్ని ఆధారంగా చేసుకుని అయిన్‌స్టయిన్ తన సార్వత్రిక సాపేక్ష సిద్ధాంతం (General Theory of Relativity) అనే మహా సౌధాన్ని లేవనెత్తేడు. గణితంలో రీమాన్ అంతటి దిట్ట. అదే

వ్యక్తి అయిదేళ్లు పోయిన తరువాత, 1859 లో కేవలం పది పుటలు పొడుగున్న ఒక పరిశోధనా పత్రాన్ని ప్రచురించి గణిత ప్రపంచాన్ని అదరగొట్టేడు. ఆ పత్రంలోనే ఆయన తన శిష్టాభిప్రాయాన్ని వెలిబుచ్చేరు. చిత్రం ఏమిటంటే సంఖ్యా వాదం (Number Theory) లో ఆయన రాసిన ఏకైక పరిశోధనా పత్రం ఇది.



బొమ్మ 10.2 రీమాన్

అప్పటికే ఎంతో పేరు మోసిన ప్రధాన సంఖ్యా సిద్ధాంతం (The Prime Number Theorem) మీద ఈ శిష్టాభిప్రాయం ఎంతో ప్రభావం చూపడం వల్ల, ఈ సమస్యని పరిష్కరించవలసిన అవసరం కీలకం అయి కూర్చుంది. ఈ ప్రధాన సంఖ్యా సిద్ధాంతానికి పెద్ద ప్రవరే ఉంది. ఇచ్చిన ఒక "సరిహద్దు" సంఖ్య x ని మించకుండా ప్రధాన సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో ఊహించి ఉరమరగా చెబుతుంది ఈ సిద్ధాంతం. ఈ ఉరమర మద్దింపుకి లెజాండర్ ఒక సూత్రాన్ని ఇస్తే దానిని కాసింత మెరుగు పరచి గౌస్ (Johann Carl Friedrich Gauss, 30 April 1777 – 23 February 1855) తన 18 వ ఏట మరొక సూత్రాన్ని ప్రవచించేరు. నిజ రేఖ మీద ఒక హద్దుని ఇస్తే, ఆ హద్దుని మించకుండా ఆ రేఖ మీద ఎన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు ఉంటాయో ఉరమరగా చెబుతుంది ఈ సూత్రం. గౌస్ అంచనాని మరింత మెరుగు పరచి రీమాన్ (గౌస్ శిష్యుడు) మరొక సూత్రం ఇచ్చేరు. ఈ సూత్రం పనిచేస్తున్నట్లే ఉంది కాని పునాదులు ఎంత దిట్టంగా ఉన్నాయో తెలియదు. పునాదులు దిట్టంగా ఉండాలంటే

రీమాన్ వెలిబుచ్చిన శిష్టాభిప్రాయం నిజం అవాలి. అప్పుడు గౌస్ ఇచ్చిన ఆ ఉరమర లెక్కలో "దోషం" (error) ఎంత ఉందో లెక్క కట్టవచ్చు.

ముందుకి కదిలే ముందు, ఇక్కడ మనకి కావలసిన అవసరాల మేరకి, ప్రమేయం (function) అంటే ఏమిటో చెప్పనివ్వండి. ప్రమేయం ఒక పెట్టె లాంటిది. ఈ పెట్టెకి ఒక పేరు ఉంటే బాగుంటుంది కదా. సర్వసాధారణంగా, ఇంగ్లీషు ప్రపంచంలో, ఇటువంటి పెట్టెకి f అనే పేరు పెడతారు. ఈ పెట్టె లోనికి మనం x అనే అంశాన్ని పంపితే ఈ పెట్టె మరొక అంశాన్ని బయటకి వెలిగక్కుతుంది – అది ఈ పెట్టె లక్షణం. ఈ ప్రక్రియని గణిత పరిభాషలో $f(x)$ అని రాస్తారు. అంటే, ఉదాహరణకి "f అనే పెట్టెలోకి x అనే సంఖ్యని పంపితే బయటకి $f(x)$ అనే సంఖ్య వస్తుంది" అని అర్థం.

ఇప్పుడు లెజాండర్–గౌస్ నిర్మించిన సూత్రాన్ని వాడడం ఎలాగో చూపెడతాను. చిన్న ఉదాహరణగా x అనే హద్దు పెడదాం. ఈ x ని మించకుండా ఎన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయో ఆ సంఖ్యని n(x) అనే ప్రమేయంతో సూచిద్దాం. దిగువ పట్టిక చూడండి. ఈ n(x) ఉరమరగా x/ ln x అంత ఉంటుంది అన్నారు లెజాండర్. మచ్చుకి x = 100 అయితే, 100/ ln 100 = 21.7 కనుక 100 లోపున ఉరమరగా 22 ప్రధాన సంఖ్యలు ఉంటాయని ఈ సూత్రం అంచనా వేస్తోంది. నిజానికి 100 లోపున 25 ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి (లెక్క వేసి చూసుకోండి). కనుక ఈ అంచనాలో దోషం 22 – 25 లేదా "వందింట –3" లేదా 3 శాతం. మరొక మచ్చుగా హద్దు x = 1000, 000,000 అయితే మన అంచనా 10^9/ ln 10^9 = 50,847,534. నిజానికి బిలియను హద్దు లోపున 48,254,942 ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి (ఇది మీరు లెక్క వేసి చూసుకోలేరు కాబట్టి నా మాట నమ్మండి.) కనుక లెజాండర్ అంచనాలో దోషం 48,254,942 – 50,847,534 = –2,592,592 లేదా 0.25 శాతం. ఈ లెజాండర్ లెక్కని గౌస్ మెరుగు పరచేరు. నిజ రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ గౌస్ అంచనా మెరుగవుతుంది (ఈ దిగువ పట్టిక చూడండి). రీమాన్ శిష్టాభిప్రాయమే ఋజువయితే ఈ అంచనాని పట్టికలో చూపినట్లు ఇంకా మెరుగు పరచవచ్చు. అదీ రీమాన్ శిష్టాభిప్రాయం ప్రాముఖ్యతకి కారణం.

x	n (x)	లెజాండర్ లెక్క లో దోషం	గౌస్ లెక్క లో దోషం	రీమాన్ లెక్క లో దోషం
10	4	0	2	–
10^2	25	–3	5	1
10^3	168	–23	10	0
10^6	78498	–6116	130	29
10^9	50847534	–2592592	1701	–79

10.2 రీమాన్ జీటా ప్రమేయం

ఇప్పుడు మళ్లా మన ప్రమేయం అనే పెట్టె వద్దకి వద్దాం. సర్వసాధారణంగా పెట్టె లోపల ఏమి జరుగుతోందో చెప్పడానికి ఒక సమీకరణం వాడతారు. ఉదాహరణకి $f(x) = x^2$ అని చెప్పేమనుకుందాం. దీని అర్థం ఏమిటంటే పెట్టెలోకి x ని పంపితే, పెట్టె x^2 ని బయటకి వెలిగక్కుతుంది. ఇంకా వివరంగా చెప్పాలంటే $x = 1$ అయితే పెట్టె బయటకి $1^2 = 1$ వస్తుంది, $x = 2$ అయితే పెట్టె బయటకి $2^2 = 4$ వస్తుంది, $x = 3$ అయితే పెట్టె బయటకి $3^2 = 9$ వస్తుంది. పెట్టె లోపలికి నిజ సంఖ్యలే వెళ్లనక్కర లేదు; కల్పన సంఖ్యలు (imaginary numbers) కూడ వెళ్ల వచ్చు; $x = i$ అయితే పెట్టె బయటకి $i^2 = -1$ వస్తుంది.

రీమాన్ తన అలవాటు ప్రకారం తను వాడిన ప్రమేయానికి "జీటా" ζ (s) అని పేరు పెట్టేరు. ఇక్కడ s అనేది జంట సంఖ్య (complex number) ని సూచిస్తుంది. కనుక ఈ జీటా ఫంక్షన్ అనే పెట్టె లోకి a + bi అనే జంట సంఖ్యని పంపితే బయటకి c + di అనే మరొక జంట సంఖ్య వస్తుంది. కొద్ది సేపట్లో రీమాన్ పేరు మీదుగా ఉన్న ఈ "జీటా ఫంక్షన్" రూపం రాసి చూపెడతాను.

రీమాన్ జీటా ప్రమేయాన్ని ఆయిలర్–రీమాన్ జీటా ప్రమేయం అని కూడ అంటారు; ఆయిలర్ తన ప్రమేయాన్ని నిజ రేఖ మీద నిర్వచిస్తే రీమాన్ అదే ప్రమేయాన్ని జంట తలం మీద అనువర్తించేలా చేసేరు. రీమాన్ జీటా ప్రమేయం బొమ్మ 10.3 లో చూపెడుతున్నాను.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots.$$

బొమ్మ 10.3 రీమాన్ జీటా ప్రమేయం

ఇక్కడ s అనేది జంట చలనరాసి (complex variable). అంటే, s = a + bi లా ఉంటుంది. ఇందులో a అన్నది నిజ అక్షం మీద దూరం, b అన్నది కల్పన అక్షం మీద దూరం. ఈ జీటా ప్రమేయాన్ని అర్థం చేసుకోడానికిగాను s కి రకరకాల విలువలు ఇచ్చి ఈ ప్రమేయం విలువలు కట్టి చూద్దాం.

ఉదాహరణకి s = 1 అయితే –

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

కళాశాలలో మొదటి సంవత్సరం విద్యార్థిని ఎవ్వరిని అడిగినా పైన చూపిన శ్రేణిని (లేదా శ్రేఢిని) హరాత్మక శ్రేణి (harmonic series) గా గుర్తు పట్టి దాని మొత్తం అనంతం (∞) అవుతుందని చెప్పగలడు. అనగా జీటా ప్రమేయానికి s = 1 దగ్గర అస్తిత్వం లేదు. శూన్యస్థానాన్ని ఇంగ్లీషులో “జీరో” (zero) అన్నట్లే ఈ s = 1 అనే బిందువు సూచించే అనంత స్థానాన్ని ఇంగ్లీషులో “పోల్” (pole) అంటారు. వీటిని తెలికగా శూన్యాలు, అనంతాలు (zeros and poles) అంటారు.

మరొక ఉదాహరణగా s = 2 అయితే, $\zeta(2) = \frac{\pi * \pi}{6}$ అవుతుందని ఋజువు చెయ్యవచ్చు. ఇక్కడ నక్షత్రాన్ని గుణకారానికి గుర్తుగా వాడేను. ఆయిలర్ ఇచ్చిన ఋజువు పాఠ్యపుస్తకాలలో సులభంగా

దొరుకుతుంది. నిజానికి s విలువ 1 కానంత సేపూ $\zeta(s)$విలువని "ఇంత" అని నిర్ధారించడం పెద్ద కష్టం కాదు.

మరొక ఉదాహరణగా s = – 2 అయితే $\zeta(-2) = 0$ అవుతుందని ఋజువు చెయ్యవచ్చు. నిజానికి s విలువ –2, – 4, – 6,... అయినంత సేపూ $\zeta(s)$ విలువని "సున్న" అని నిర్ధారించడం కూడ పెద్ద కష్టం కాదు.

మూడవ ఉదాహరణగా s = –1 అయితే,

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

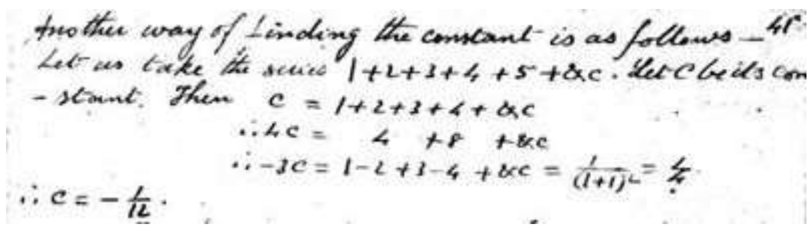
అనగా 1 నుండి నిర్విరామంగా వచ్చే పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని కూడితే వచ్చే మొత్తం ఎంతో అంత అన్నమాట. అలా దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ మొత్తం పెరుగూనే ఉంటుంది కదా. ఈ అంక శ్రేణి (arithmetic series) విలువ అనంతం (∞) అవుతుందని అనిపిస్తుంది కాని అలా అవనక్కర లేదని ఇప్పుడు ఋజువు చేస్తాను.

ఈ రకం అపసరణ (divergent) పరిస్థితి ఎదురయినప్పుడు ఆ చేస్తూన్న లెక్క ఎందుకూ పనికిరాకుండా పోతుంది. గణిత శాస్త్రవేత్తలయితే ఇటువంటి అపసంతి శ్రేణికి ముందొక పేరు పెట్టి, పక్కన పెట్టి, మరొక "చెప్పిన మాట వినే" సమస్యని ఎన్నుకుంటారు. కనుక మనం కూడ ఈ రకం శ్రేణి (series) కి అపసరణ శ్రేణి లేదా అపసృత శ్రేణి (divergent series) అని పేరు పెడదాం.

భౌతిక శాస్త్రంలో – ప్రత్యేకించి గుళిక వాదం (quantum theory) లోనూ, పోగుల వాదం (string theory లోనూ – ఇటువంటి శ్రేణి ఎదురయితే ఏదో పేరు పెట్టేసి తప్పించుకు తిరగడానికి వీలు పడదు. వారు సాధించ దల్చుకున్న సమస్యకి పరిష్కారం కావాలనుకుంటే పైన చూపించిన శ్రేణిని

కూడగా వచ్చిన మొత్తాన్ని వాడాలి. కాని ఆ మొత్తం అనంతం (∞)అయితే దానిని వాడలేరు. ఏదో ఒక పరిమితమైన సంఖ్యని వాడి రోజు గడుపుకోవాలి. ఏమిటా పరిమితమైన సంఖ్య?

ఇటువంటి అపసరణ శ్రేణులని ఎలా మచ్చిక చేసుకుని ఉపయోగించుకోవచ్చో రామానుజన్ తన "నోటు" పుస్తకాలలో చెప్పేరు. బొమ్మ 10.4 చూడండి.



బొమ్మ 10.4 రామానుజన్ నోటు పుస్తకాలలో ఒక కాగితంలో ఒక భాగం

10.3 రీమాన్ జీటా ప్రమేయం విలువ

భౌతిక శాస్త్రవేత్తలకి లెక్కలు లేక పోతే రోజు గడవదు. కాని లెక్కల మేష్టారు చెప్పినట్లు లెక్క చేస్తే ఆశించిన సమాధానం రాకపోతే లెక్క “కిట్టించడానికి” జంకరు. ఈ రకం “కిట్టించడం” అనే ప్రక్రియకి పరిభాషలో, సందర్భానుసారంగా, ‘రెగ్యులరైజేషన్,’ ‘సమబిలిటీ,’ వగైరా పేర్లు వాడుతూ ఊంటారు. అదే జరిగింది. పైన రాసిన శ్రేణి విలువ ఎంతకి కిట్టించడం? రామానుజన్ నోటు పుస్తకాలలో దీని విలువ $-(1/12)$ అని ఉంది కనుక ఆ విలువ అయితే అన్ని విధాలా నప్పుతుందని ఒకరు అన్నారు. అందరూ సై అంటే సై అన్నారు. అనగా, ఇప్పటి నుండి

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -(1/12)$$

ధన సంఖ్యలన్నిటిని కలిపితే ఋణ సంఖ్య ఎలా వస్తుందండీ? కలికాలం కాకపోతే. పూర్ణాంకాలన్నిటినీ కలిపితే భిన్నాంకం ఎలా వస్తుందండీ, విడ్డూరంగా లేదూ?

ఎవ్వరు ఎన్ని అభ్యంతరాలు చెప్పినా ఈ స్థావర జంగమాత్మకమైన సృష్టిలో S = $(-1/12)$ అయితేనే ఈ విశ్వం "ఉష్! కాకీ" అంటే ఎగిరిపోయిన కాకిలా ఎగిరిపోకుండా ఏదో ఇలా నడుస్తుందిట. అందుకని ఈ సందర్భంలో అహం దెబ్బ తిన్న ఒక లెక్కల మేష్టారు ఈ కింది విధంగా ఒక ఋజువు తయారు చేసేరు.

10.3.1 జీటా ప్రమేయం విలువ: తేలిక పద్ధతి

ముందు S1 అనే మరొక శ్రేణితో మొదలు పెడదాం.

(పిట్ట కథ: ఈ శ్రేణి విలువ ½ అని కూడ రామానుజన్ నోటు పుస్తకాలలో ఉంది. ఈ రకం అపసరణ శ్రేణిని మొత్తం చెయ్యడానికి ఇది ప్రత్యేకమైన పద్ధతి అని కాని, దీని గురించి ఆయన ఇతర ఆలోచనలు కాని ఏవీ ఆ పుస్తకాలలో లేవు. ఈ రకం కూడిక పద్ధతిని రామానుజన్ పద్ధతి అంటారు. ఇప్పుడు ఈ విలువ భౌతిక శాస్త్రంలో వీశ్వాన్ని అర్థం చేసుకునే పోగుల వాదంలో (string theory) చాల ప్రాముఖ్యత వహిస్తోంది.)

S1 = 1 – 1 + 1 –1 + 1 – 1 +.......

ఈ శ్రేణిలో ఒకే ఒక అంశం (పదం) ఉంటే ఆ పాక్షిక మొత్తం (partial sum) విలువ 1. రెండు అంశాలు ఉంటే పాక్షిక మొత్తం విలువ 1 – 1 = 0. మూడు అంశాలు ఉంటే పాక్షిక మొత్తం విలువ 1 – 1 + 1 = 1. అంటే ఏమిటన్న మాట? మనం అనంతం వైపు చేసే ప్రయాణంలో ఈ పాక్షిక మొత్తాలు 0 కీ 1 కీ మధ్య ఊగిసలాడుతున్నాయి తప్ప ఒక విలువ దగ్గరకి అభిసరించడం లేదు. కనుక "అనంతం వరకు" వెళ్లగలిగితే మొత్తం ఎంత? తుని తగవులా ఇటూ అటూ కాకుండా $(1/2)$ అని ఒప్పేసుకుందాం (రామానుజన్ వెనకాతల దన్నుగా ఉన్నాడనే ధీమాతో). ఈ ఫలితం తర్వాత మెట్టులో వాడబోతున్నాం.
ఇప్పుడు S2 అనే మరొక శ్రేణిని తీసుకుందాం.

$S2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots\ldots.$

ఈ S2 కి మరొక S2 ని కలుపుదాం. ఈ కలపడం ఈ దిగువ చూపిన విధంగా, “పక్కకి జరిపి” కలుపుదాం. (రెండూ అనంత శ్రేణులే కనుక ఇలా పక్కకి జరిపి కలపడంలో ప్రమాదం లేదు.)

$$
\begin{aligned}
2\,S2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots\ldots. \\
&\quad + \qquad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots\ldots. \\
2\,S2 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots. \quad = (1/2)
\end{aligned}
$$

ఆఖరి మెట్టులో కుడి పక్క వేసిన $(1/2)$ మొదటి మెట్టులో వచ్చిన ఫలితమే!

కనుక $2S2 = (1/2)$

లేదా $S2 = 1/4$

ఋజువుని పూర్తి చెయ్యడానికి S నుండి S2 ని ఈ దిగువ చూపిన విధంగా తీసివేద్దాం:

$$
\begin{aligned}
S - S2 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots.. \\
&\quad - [1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots.] \\
&= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 \ldots\ldots.
\end{aligned}
$$

1 నుండి 1 తీసెస్తే 0 వచ్చింది. 2 నుండి – 2 తీసెస్తే +4 వచ్చింది, అలా ఉంటుందీ లెక్క.

ఇప్పుడు 4 ని కుండలీకరణాల బయటకి లాగేసి, దీనిని ఈ దిగువ విధంగా రాయవచ్చు:

$S - S2 \quad = 4\,(1 + 2 + 3 + ...) = 4S$

అనగా $3S = -\,S2$.

పైన చేసిన లెక్క ప్రకారం $S2 = ¼$ కనుక $S = -\,(1/12)$

అనగా $1 + 2 + 3 + 4 + ... = -\,(1/12)$

ఇదంతా కిట్టించినట్లు కనబడుతోందా? ఈ ఫలితం నమ్మడానికి వీలుగా లేదు కదూ? ధన సంఖ్యలని అలా కలుపుకుంటూ పోతే మొత్తం ధన సంఖ్యే రావాలి. అలా జరగలేదు. పూర్ణాంకాలని అలా కలుపుకుంటూ పోతే ఫలితం పూర్ణాంకమే అవాలి. ఇక్కడ భిన్నాంకం వచ్చింది. అసలు ఈ అంకెలని అనంతం వరకు అలా కలుపుకుంటూ పోతే మొత్తం విలువ పాపం పెరిగినట్లు పెరిగి, పెరిగి, చివరికి "పేలిపోవాలి." అలా జరగలేదు. కాని మనం చేసిన పద్ధతిలో ఎక్కడా లోపం లేదు.

ఇదే లెక్కని మరికొంచెం పకడ్బందీగా (అంటే కలన గణితం (calculus) ఉపయోగించి) చూపెడతాను. ఈ ఋజువు మహా మేధావి ఆయిలర్ (Euler) చలవ. దీనిని అర్థం చేసుకుందుకి అవకలనం (differentiation) తో కొద్ది పరిచయం ఉంటే చాలు. ఇక్కడ 10.3.2 లో చూపిస్తున్న ప్రత్యామ్నాయ ఋజువు చదవకుండా దాటేసినా పరవాలేదు.

10.3.2 జీటా ప్రమేయం విలువ: దిట్టమైన పద్ధతి

ఈ దిగువ చూపిన అనంత గుణోత్తర శ్రేణి (geometric series) మొత్తంతో మొదలు పెడదాం. ఈ ఫలితం లెక్కలు నేర్చిన ప్రతి విద్యార్థికీ తెలిసే ఉంటుంది. ఈ విషయం ఇంతకు పూర్వమే తెలిసి ఉండకపోతే మరేమీ ప్రమాదం లేదు; నేను చెబుతూన్నది నిజమే అని నమ్మి ముందుకి కదలండి.

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{(1-x)}, \qquad |x| < 1$$

ఇక్కడ x విలువ 1 కంటె తక్కువ అయి ఉన్నంత సేపూ ఈ ఫలితం పని చేస్తుంది.

ఇప్పుడు అవకలనం (differentiate) చెయ్యడానికి వాడే సూత్రాన్ని ఇక్కడ చెబుతాను. ఇది ఈ రోజుల్లో ఉన్నత పాఠశాలలోనే చెబుతున్నారు.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right) = n\, x^{(n-1)}$$

ఇప్పుడు పైన చూపిన అనంత శ్రేణిలోని అంశాలని, ఒకటీ, ఒకటీ అవకలించుకుంటూ పోదాం. ముందుగా స్థిరాంకమైన 1 ని అవకలించగా 0 వస్తుంది. x అన్నా x^1 అన్నా ఒక్కటే కనుక అవకలన సూత్రాన్ని బట్టి x ని అవకలిస్తే 1 వస్తుంది. అదే విధంగా x^2 ని అవకలిస్తే 2x వస్తుంది. (ఈ రకం గణితం లెక్కలతో ఏ మాత్రం పరిచయం ఉన్నా తెలుస్తుంది.) ఈ అవకలన సూత్రాన్ని కుడి పక్క కూడా ప్రయోగించాలి. అది ప్రయోగించే విధానం మీద ఒక కప్పదాటు వేస్తే అవకలనం పూర్తి అయిన తరువాత మనకి మిగిలిన సమీకరణం ఈ దిగువ చూపిన విధంగా ఉంటుంది.

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)(1-x)}$$

ఇప్పుడు $x = -1$ అనుకుంటే

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - + \ldots = ¼$$

ఈ ఫలితం తరువాత ఉపయోగపడుతుంది. ప్రస్తుతానికి పక్కన పెడదాం.

ఇప్పుడు "జీటా ఫంక్షన్" (zeta function) ని రంగంలోకి దింపుదాం:

$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots\ldots$

దీనిని రెండు పక్కలా (2^{-s}) తో గుణిస్తే (ఎందుకని అడగకండి. ఇటువంటి గారడీలు కల్పన తలంలో చేసే గణితంలో సాధారణమే. Analytic continuation, holomorphic functions వంటి పెద్ద పెద్ద మాటలు వాడకుండా అసలు కారణం టూకీగా చెప్పటం కష్టం.)

$$(2^{-s})\,\zeta(s) = (2^{-s})\,(1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots\ldots)$$

కుడిపక్క కుండలీకరణాలని విప్పితే, అంటే, చూపించిన గుణకారాన్ని చేసేస్తే, (ఈ అంచె చెయ్యడానికి బీజగణితం తో కొద్దిగా పరిచయం ఉండాలి)

$$(2^{-s})\,\zeta(s) = 2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s}\ \ldots\ldots$$

ఇప్పుడు పై సమీకరణాన్ని 2 చేత మళ్లా గుణించి, వచ్చిన లబ్దాన్ని $\zeta(s)$ నుండి తీసేద్దాం. అందరికీ సుబోధకంగా ఉండడానికి ఈ పనిని రెండు అంచెలలో చేద్దాం: ముందు $\zeta(s)$ ని ఈ దిగువ విధంగా రాసి, దాని కింద $(2^{-s})\,\zeta(s)$ ని తిరగ రాద్దాం.

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots\ldots$$
$$= 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots\ldots$$

$$2\,(2^{-s})\,\zeta(s) = 2\,\{2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s}\ \ldots\ldots\}$$

ఇప్పుడు మొదటి సమీకరణం నుండి రెండవ సమీకరణాన్ని తీసివేద్దాం.

$$(1 - 2\,(2^{-s})\,\zeta(s)) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots\ldots$$
$$- 2\,\{2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s}\ \ldots\ldots\}$$

ఇది పైకి చూడ్డానికి గాభరాగా కనిపిస్తూన్నా ఇక్కడ గణితపరంగా చేసిన బ్రహ్మ విద్య ఏమీ లేదు. ముందు, కుడి పక్క 1 వేసేం. తరువాత పైవరుసలో 2^{-s} ఉంది, కింది వరుసలో 2^{-s} రెండు సార్లు ఋణ సంజ్ఞతో ఉంది. రెండూ కలపగా మిగిలేది ఒక ఋణ సంజ్ఞతో ఉన్న 2^{-s}. తరువాత పైవరుసలో ఉన్న 3^{-s} ని యథాతథంగా దింపేసుకుందాం. ఇలా చేసుకుంటూ పోతే మిగిలేది –

$$(1 - 2\,(2^{-s})\,\zeta(s)) \;=\; 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \ldots\ldots$$

ఇప్పుడు $s = -1$ అయితే దీని విలువ ఎంత అవుతుందో లెక్క కడదాం.

కుడిపక్క:

$$1 - 2^{+1} + 3^{+1} - 4^{+1} + \ldots\ldots = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots\ldots$$

ఎడం పక్క:

ఇప్పుడు $s = -1$ అయినప్పుడు 2^{-s} కాస్తా 2^{+1} అవుతుంది. కనుక ఎడంపక్క $(1 - (2)\,(2))\,\zeta(s) = -\,3\,\zeta(s)$. ఇక ఎడం పక్క చెయ్యవలసినదల్లా $s = -1$ అయినప్పుడు $\zeta(s)$ విలువ కూడా కట్టడమే.

$$\zeta(s = -1) \;=\; 1 + 2^{+1} + 3^{+1} + 4^{+1} + \ldots\ldots$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots$$
$$-\,3\,\zeta(s = -1) = -\,3\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots)$$

ఎడమ కుడి చేర్చితే:

$$-\,3\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots.) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots\ldots$$

కాని ఈ కుడి పక్క ఉన్న అనంత శ్రేణి విలువ $(1/4)$ అని మొట్టమొదటే లెక్కగట్టేం. ఆ విలువ ఉపయోగించి,

$$-3(1+2+3+4+5+....)=1/4$$

లేదా

$$(1+2+3+4+5+....)=-1/12$$

ఇందాకటి ఫలితమే వచ్చింది. అందరికీ అందుబాటులో లేని కొద్దిపాటి క్లిష్టత ఉన్న గణితం వాడేం. కనుక ఇప్పుడు ఈ ఫలితం నమ్మడానికి వీలవుతుందా?

మొదటి భాగంలో ఇచ్చిన ఋజువులో లోపం ఏదీ లేదు కానీ ఏదో లోపం ఉందేమో అని అనిపిస్తుంది. ఈ రెండవ భాగంలో ఇచ్చిన ఋజువు మరికొంచెం పకడ్బందీగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తుంది. ఏ ఋజువు నచ్చితే దానినే తీసుకోండి. గణితంలో ప్రవేశం అత్యల్పంగా ఉన్న వారికి మొదటి ఋజువు చాలు. ఏదో వానాకాలపు "కేలుక్యులస్" వరకు చదువుకున్నవారికి ఈ రెండవ ఋజువు పని చేస్తుంది.

ఇంత ప్రయాస పడి ఎందుకు ఈ ఋజువులు ఇక్కడ చూపించేను? ఒకే ఒక్క బిందువు, అనగా $s = 1$ దగ్గర, ఈ ప్రమేయం అనంతం అవుతుంది తప్ప మిగిలిన జంట తలంలో మరెక్కడైనా సరే $\zeta(s)$ విలువ నిర్ధారించడం సుసాధ్యమే అని ఋజువు చెయ్యడానికి. ఈ లక్షణం ఉన్న ప్రమేయాలని ఇంగ్లీషులో "హోలొమోర్ఫిక్" ప్రమేయాలు అంటారు; 'హోలో' ని సమస్త, అఖిల, సర్వ అనిన్నీ, 'మోర్ఫ్' ని రూప, స్వరూప, అనిన్నీ తెలిగించవచ్చు. ఇంతకంటె వివరాలు చెప్పి విసిగించను.

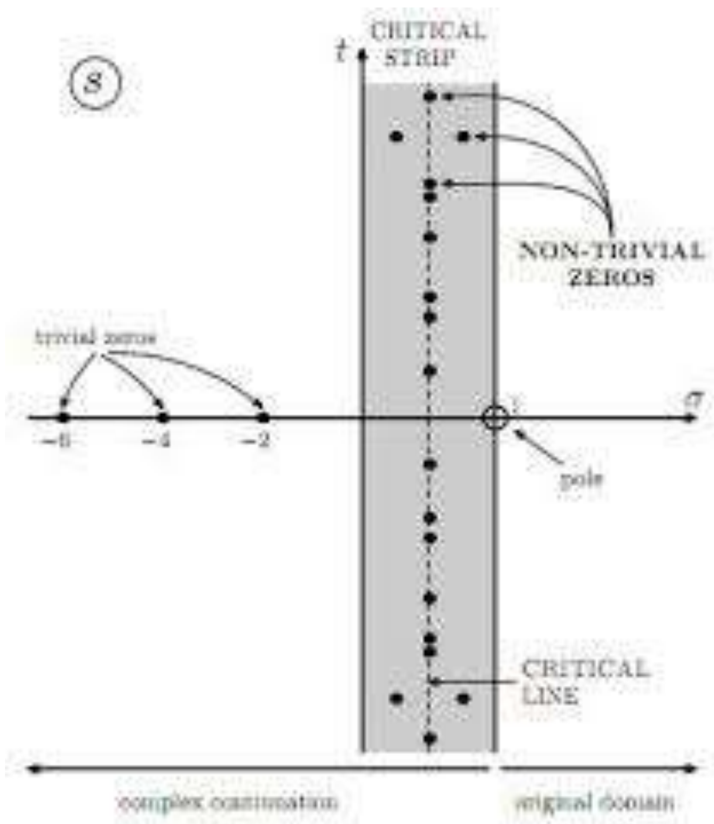
10.4 రీమాన్ ప్రమేయం యొక్క శూన్యస్థానాలు (Zeros of Riemann Function)

మిలియను డాలర్లు గెలుచుకోడానికి మీ ఋజువు బాణసంచాలతో మిలమిల మెరవాలంటే "చంద్రశాఖాన్యాయం" లా దారి చూపెడతాను, కాని ఆ దూరం మీతో ప్రయాణించే ఓపిక, స్థోమత నాలో లేవు. కాసుకోండి!

ఏదైనా ఒక ప్రమేయాన్ని, f(x) ని, ఇచ్చి దాని శూన్యస్థానాలు లేదా శూన్యాలు (zeros) కనుక్కోమంటే మనం చెయ్యవలసిందల్లా $f(x) = 0$ అని రాసి, x ఏ విలువ తీసుకుంటే ఈ సమీకరణం చెల్లుతుందో లెక్క కట్టాలి. ఆ x విలువలు ఆ సమీకరణానికి శూన్యస్థానాలు అవుతాయి. ఉదాహరణకి $f(x) = x - 2$ అయితే $x = 2$ అయినప్పుడు $f(x) = 0$ చెల్లుతుంది. కనుక $x = 2$ అనేది $f(x) = x - 2 = 0$ అనే ప్రమేయానికి శూన్యస్థానం అవుతుంది. మరొక ఉదాహరణగా, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ అయితే $x = 1$ అయినా, $x = 2$ అయినా, $x = -5$ అయినా $f(x) = 0$ చెల్లుతుంది. కనుక $x = 1$, $x = 2$, $x = -5$ అనేవి $f(x) = x^3 + 2x^2 -13x + 10 = 0$ అనే ప్రమేయానికి శూన్యస్థానాలు అవుతాయి. ఈ శూన్యస్థానాలనే శూన్యాలు అనిన్నీ మూలాలు (roots) అనిన్నీ కూడ అంటారు.

ఇప్పుడు మనకి కావలసినది రీమాన్ నిర్వచించిన జీటా ప్రమేయం యొక్క శూన్యస్థానాలు. జీటా ప్రమేయానికి $s = -2, -4, -6, -8, \ldots$ వగైరాలన్నీ శూన్యస్థానాలని మనం ఓపికగా లెక్క కట్టి నిర్ణయించవచ్చు. అనగా, $\zeta(s = -2) = \zeta(s = -4) = \zeta(s = -6) = \ldots = 0$. ఇవి మన ప్రస్తుత అవసరాలకి పనికిరావు. కనుక వీటికి "పనికిమాలిన" (trivial) శూన్యస్థానాలు అని పేరు పెట్టి పక్కన పెడదాం. మిగిలినవన్నీ "పనికొచ్చే" శూన్యస్థానాలు. మనకి తెలుసున్నంతవరకు, ఈ పనికొచ్చే శూన్యస్థానాలు అన్నీ $s = ½ + b\,i$ అనే రేఖ మీదనే ఉన్నాయి. ఈ రేఖ జంట తలంలో కల్పన అక్షానికి సమాంతరంగా, నిజ రేఖ మీద 1/2 దూరంలో గీసిన గీత (బొమ్మ 10.5 చూడండి). రీమాన్ వ్యక్తపరచిన శిష్టాభిప్రాయం ఏమిటంటే "పనికొచ్చే" శూన్యస్థానాలన్నీ $s = ½ + bi$ అనే ఈ కీలక

రేఖ (critical line) మీద తప్ప మరెక్కడా ఉండవని. కీలక బద్దీ (critical strip) మీద ఉంటే సరిపోదు; కీలక రేఖ మీద తప్ప మరెక్కడా ఉండకూడదు. ఈ విషయం ఋజువు చెయ్యాలి.



బొమ్మ 10.5 రీమాన్ జీటా ప్రమేయం శూన్యస్థానాలు, కీలక రేఖ, కీలక బద్దీ

10.5 ఇక్కడ రామానుజన్ కి ఏదైనా పాత్ర ఉందా?

రీమాన్ వ్యక్తపరచిన శిష్టాభిప్రాయనికి ఒక రకమైన ఋజువుని 1914 లో హార్డీ కనుక్కున్నారు. (రామానుజన్ హార్డీకి రాసిన మొదటి ఉత్తరం 1913 లో అని మరచిపోకండి.) హార్డీ పైన చెప్పిన s = ½ + bi అనే కీలక రేఖ మీద $\zeta(s)$ కి అనంతమైనన్ని శూన్యస్థానాలు ఉన్నాయని ఋజువు చేసేరు కాని s = 0 + bi నుండి s = 1 + bi వరకు ఉన్న కీలక బద్దీ (critical strip) లో మరే

శూన్యస్థానాలు లేవని ఋజువు చెయ్యలేదు. కనుక హార్డీ కనుక్కున్న ఋజువు అసంపూర్ణంగా ఉండిపోయింది.

రామానుజన్ తో పరిచయం అయిన తరువాత హార్డీ తెలుసుకున్నది ఏమిటంటే రీమాన్ సాధించిన ఫలితాలు దరిదాపుగా అన్నీ రామానుజన్ నోటు పుస్తకాలలో ఉండడం. రామానుజన్ గురుముఖంగా ఏదీ నేర్చుకోలేదు. రామానుజన్ కి అంత వరకు గణిత ప్రపంచంలో ఏమిటి జరిగిందో తెలియదు. అయినా సరే రీమాన్ కి తెలిసిన విషయాలన్నీ రామానుజన్ కి తెలిసే ఉండాలి. కనుక రీమాన్ ప్రతిపాదించిన సమస్య పరిష్కారానికి కావలసిన స్థోమత రామానుజన్ దగ్గర ఉండే ఉండాలి. అప్పటికే ఈ సమస్యతో కుస్తీ పడుతున్న హార్డీ ఈ విషయాన్ని రామానుజన్ తో ముచ్చటించే ఉండాలి. రామానుజన్ కూడ ఈ సమస్య పరిష్కరించడానికి ప్రయత్నం చేసేరేమో. కాని ఒకటి మాత్రం నిజం. రీమాన్ సమస్యని అర్ధంతరంగా పరిష్కరించిన తరువాత హార్డీ మనోవ్యాకులతకి లోనై మాత్రలు మింగి ఆత్మహత్య చేసుకుందుకి ప్రయత్నం చేసేరు. రామానుజన్ కూడ మనోవ్యాకులతకి లోనై రైలుబండి కింద పడి చచ్చిపోడానికి ప్రయత్నం చేసేరు. అదృష్టవశాత్తు ఇంజనీరు బండికి మారకట్టు వేసి ఆపగలిగేడు కనుక రామానుజన్ గండం నుండి బయట పడ్డారు. ఈ రెండూ కేవలం కాకతాళీయం కావచ్చు, ఈ రెండు సంఘటనలకి రీమాన్ సమస్యని పరిష్కరించడానికి వీరిరువురు చేసిన ప్రయత్నాలకి మధ్య ఉన్నది బాదరాయణ సంబంధమే కావచ్చు. కాని ఈ సమస్యే వీరి మతిని చలింపజేసిందని అభిజ్ఞ వర్గాల్లో అనుకున్న వాళ్లు లేకపోలేదు.

ఆధారాలు

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan_summation
2. http://qntm.org/riemann
3. http://www.claymath.org/millennium/Rules_etc/

4. du Sautoy, Marcus, *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. HarperCollins. 2003. ISBN 0-066-21070-4.

5. B. Riemann, "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse," ("On the Number of Prime Numbers Less Than a Given Quantity"), *Monatsberichte der Berliner Akademie* (*Monthly Review of the Berlin Academy)*, November 1859

6. Ramanujan wrote in his second letter to G. H. Hardy, dated 27 February 1913:

"*Dear Sir, I am very much gratified on perusing your letter of the 8th February 1913. I was expecting a reply from you similar to the one which a Mathematics Professor at London wrote asking me to study carefully Bromwich's Infinite Series and not fall into the pitfalls of divergent series. ... I told him that the sum of an infinite number of terms of the series: 1 + 2 + 3 + 4 + · · · = −1/12 under my theory. If I tell you this you will at once point out to me the lunatic asylum as my goal. I dilate on this simply to convince you that you will not be able to follow my methods of proof if I indicate the lines on which I proceed in a single letter. ...*"

7. ఎరికలపూడి వాసుదేవరావు, "ఆచార్య సుబ్బరామన్ మీనాక్షీసుందరం," ఈమాట అంతర్జాల పత్రిక, నవంబరు 2013

8. వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు, "రీమాన్ శిష్టాభిప్రాయం," ఈమాట అంతర్జాల పత్రిక, సెప్టెంబరు 2015

11. π – రామానుజన్ స్నేహితురాలు

ఒక వృత్తంలో కేంద్రం నుండి పరిధి వరకు ఉండే దూరాన్ని వ్యాసార్థం అంటారు. ఈ వ్యాసార్థం విలువ 1 అయితే ఆ వృత్తం వైశాల్యం విలువ 3.1415926535.... అవుతుంది. ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసం విలువ 1 అయితే ఆ వృత్తం పరిధి (చుట్టుకొలత) కూడ సరిగ్గా ఇంతే ఉంటుంది. ఈ సంఖ్య గణితంలోనూ, భౌతిక శాస్త్రంలోనూ, ఎన్నో చోట్ల, వృత్తంతో సంబంధం లేని చోట్ల కూడ, తారస పడుతూ ఉంటుంది కనుక దీనికి ప్రత్యేకించి ఒక పేరు (గుర్తు) కేటాయించేరు. దీనిని గ్రీకు భాషలో పై (π) అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు. కనుక, ఇటుపైన

$\pi = 3.1415926535...$

పైన ఇచ్చిన సంఖ్యలో చివర ఉన్న మూడు చుక్కలని చూడండి. సంప్రదాయికంగా వీటి అర్థం ఏమిటంటే ఎంత దూరం వెళ్లినా ఆ దశాంశ స్థానాలలో అంకెలు, అవిరామంగా, అలా వస్తూనే ఉంటాయి. ప్రత్యేకించి, ఈ సందర్భంలో ఈ అంకెలు ఒక ఆవర్తన బాణీ ప్రదర్శించకుండా వస్తూ ఉంటాయి. లెక్కలు చేసేటప్పుడు ఇలాంటి సంఖ్యలతో వేగడం కష్టం. అందుకని పై సంఖ్యని ఏ నాలుగవ దశాంశ స్థానంలోనో ఆపేసి, 3.1416 అని రాసి సరిపెట్టుకుంటాం. లేదా 22/7 లాంటి భిన్నంతో సరిపెట్టుకుంటాం.

ఈ π చాల ముఖ్యమైన సంఖ్య అని పురాతన కాలం నుండీ, చాలా దేశాలలో, తెలుసు. క్రీ. పూ. 1620 నాటి రిండ్ పపైరస్ లో దీని విలువ $2^8/3^4 = 3.1605$ అని చెప్పబడి ఉంది. సా. శ. 600 లో భారతదేశంలో బ్రహ్మగుప్తుడు దీని విలువ ఉరమరగా 10 = 3.162.... ఉంటుందని ఊహించేడు. గుప్త సామ్రాజ్యంలో ఉన్న ఆర్యభట్టు $\pi \approx 62832/20000 = 3.1416$ అని వాడి, దానితో భూమి చుట్టుకొలత గణన చేసేడు. కేరళకి చెందిన మాధవ (సు. 1350 – 1425) ఈ దిగువ చూపిన అనంత శ్రేణిని ఉపయోగించి π విలువని 13 దశాంశ స్థానాల వరకు నిర్దేశించగలిగేడు.

π = 4 – 43 + 45 –47 + 49– + ...

సా. శ. 1593 లో ఫ్రాంస్వా వయాటా (Francios Vieta) π విలువ కనుక్కుందుకి ఈ దిగువ చూపిన సమీకరణం ఇచ్చేదు:

2 = 12 x 12 +1212 x 12 +1 212 +1212 x‐‐‐...

ఈ సమీకరణంలో గమనించదగ్గ విశేషం ఏమిటంటే ఇది అనంత “లబ్ద” శ్రేణి.

జీటా ప్రమేయాన్ని 2 దగ్గర కాని 4 దగ్గర కాని విలువ కట్టి తద్వారా π విలువ తెలుసుకోవచ్చు:

(s = 2) = ★6
(s = 4) = ★★★90

ఆర్కిమిడీస్ కాలం నుండి నేటి వరకు గణితంలో కొద్దో, గొప్పో ప్రతిభ ఉన్న ప్రతి వ్యక్తీ π మీద పరిశోధన చెయ్యకుండా విడచిపెట్టలేదు. వారు చేసిన పనులన్నీ ఇక్కడ సమీక్షించడం నా ఉద్దేశం కాదు.

అప్పుడప్పుడు π విలువని 3.1416 వంటి పరిమితమైన ఖచ్చితత్వం (accuracy) ఉన్న సంఖ్యలతో సరిపెట్టుకుంటే మనకి లభించే ఫలితంలో ఉండవలసిన ఖచ్చితత్త్వం ఉండదు. అప్పుడు తొమ్మిది దశాంశ స్థానాలు వాడి 3.14159265 తో సరిపెట్టుకోవచ్చు. ఈ విశ్వం ఆకారం ఒక మహా గోళంగా ఊహించుకుని ఈ గోళం చుట్టుకొలత “దోష రహితంగా” లెక్క కట్టవలసి వచ్చినప్పుడు తొమ్మిది దశాంశ స్థానాలు కూడ సరిపోవు; 39 దశాంశ స్థానాలు వాడవలసి ఉంటుంది. అప్పుడు మనకి లభించే ఫలితంలో “ఉదజని అణువు వ్యాసం వాసి” దోషం కంటె తక్కువ దోషం ఉంటుంది. ఇటువంటి పరిస్థితులలో తప్ప – ఎటువంటి సందర్భంలోనూ – π ని రాయడంలో 50 దశాంశ

స్థానాలు మించి వాడవలసిన అవసరం రాదు. కాని కలన యంత్రాలు వాడుకలోకి వచ్చిన తరువాత π విలువని 10,000 బిలియను దశాంశ స్థానాలు దాటి కూడ లెక్క కట్టి చూసేరు. ఎందుకుట?

పై ప్రశ్నకి ఒకటి కంటె ఎక్కువ సమాధానాలే ఇవ్వ వచ్చు. ఒకటి, కలన యంత్రాలు, అవి వాడే గణన పద్ధతులు (algorithms) ఎంత సమర్ధవంతంగా పని చేస్తున్నాయో తెలుసుకోడానికి π విలువ కట్టడమనేది ఒక అగ్ని పరీక్షలా వాడతారు. రెండు, π విలువ కట్టడం లో ఖచ్చితతత్త్వం పెరిగే కొద్దీ ఆ విలువ చేత ప్రభావితమైన సంఖ్యా గణితం (number theory) లో లోతుకి దిగడానికి సావకాశాలు పెరుగుతాయి. మూడు, అన్నిటి కంటె ముఖ్యమైన కారణం — పరిష్కారం లేకుండా సమశ్య ఉండిపోతే మానవుడి మేధకి ఒకటే దురద! ఇంతవరకు ఎవ్వరు అధిరోహించని శిఖరం ఉంటే దానిని ఎక్కాలి అన్న కోరిక ఉన్నట్లే, π విలువని ఎవ్వరు ఎక్కువ దశాంశ స్థానాల వరకు కట్టగలరన్నది ఒక సవాలు! అంతే!!

అంతే కాకుండా, ఇంతవరకు π గురించి మనకి తెలియని విషయాలు, తెలుసుకోవలసిన విషయాలు, ప్రహేళికలు ఎన్నో ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి పూర్ణ సంఖ్యల మీద కేవలం అంకగణిత పరికర్తలు (arithmetic operators) – అనగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు, వర్గమూలాలు – మాత్రమే ఉపయోగించి π విలువ కట్టడం సాధ్యం కాదని మనకి తెలుసు. అంతే కాకుండా, π లో నిరంతరాయంగా వచ్చే అంకెలలో ఎప్పటికీ ఒక బాణీ అంటూ కనిపించదని అనుకుంటున్నాము కానీ, ఈ విషయం ఎవ్వరు ఇంతవరకు ఋజువు చెయ్యలేదు. (బిలియనుల పైబడి పరిశీలించిన దశాంశ స్థానాలలో ఇంతవరకు ఏ రకం బాణీ కనిపించ లేదు. ఇటు పైన కూడ అటువంటి బాణీ లేకుండా ఉంటుందని భరోసా ఏదీ?). ఇదివరలో మనవి చేసినట్లు, వృత్తంతో ఏ విధమైన సంబంధంలేని సందర్భాలలో కూడ π తరచు తారసపడుతూ ఉంటుంది. ఉదాహరణకి పూర్ణ సంఖ్యలలో ఏదో ఒక దానిని యధాలాపంగా ఎన్నుకుని ఆ సంఖ్యయొక్క ప్రధాన భాజకాలలో పునరుక్తి లేకుండా ఉన్న సంఘటన యొక్క సంభావ్యత లెక్క కడితే అది $6/\pi^2$ అని సమాధానం వస్తుంది. ఈ సందర్భంలో π కనబడవలసిన అవసరం లేదు. కాని కనబడింది! ఎందువల్ల? రెండున్నర సహస్రాబ్దాల నుండి π మీద ఆసక్తి తగ్గకుండా నిలవడానికి ఇవి కొన్ని కారణాలు.

11.1 రామానుజన్ స్నేహవర్గంలో π

రామానుజన్ స్నేహితులలో π కి ఒక ప్రత్యేక స్థానం ఉందనవచ్చు: π యొక్క విలువని చాల దశాంశ స్థానాల వరకు దక్షతతో లెక్క కట్టే పద్ధతులని ఎన్నిటినో రామానుజన్ కనిపెట్టేరు – కలన యంత్రాల ఆవిష్కరణకి ముందు రోజులలో! ఆ పద్ధతులని కలన యంత్రాల జోరుతో మేళవించి π విలువ బిలియనుల దశాంశ స్థానాల వరకు లెక్క కట్ట గలిగే స్తోమత మనకి ఇప్పుడు వచ్చింది.

ఉదాహరణ 1:
ఈ దిగువ ఇచ్చిన అనంత శ్రేణి (1/π) విలువని పరిగణన చెయ్యడానికి బాగా ఉపయోగపడుతుంది.

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}=\frac{1}{\pi}$$

బొమ్మ 11.1 రామానుజన్ 1914 లో ఇచ్చిన సూత్రం

ఈ ప్రక్రియ చాల జోరుగా అభిసరణ చెందుతుంది (converge అవుతుంది). ఎంత జోరుగా? ఉదాహరణకి k = 0 అనుకుంటే ఈ "అనంత శ్రేణి" లో ఒకే ఒక పదం (term) ఉంటుంది. దాని విలువ కడితే –

π = 9801/(2 x 1103 x 2) = 3.14159273001...

దీనిని మొదట్లో ఇచ్చిన π యొక్క అసలు విలువతో పోల్చితే దోషం 0.0000000764235.... అవుతుంది కనుక దోషం దశాంశ బిందువు తరువాత 8 వ స్థానంలో కనిపిస్తోంది. మిగిలిన పదాలని కూడ చేర్చితే ఈ విలువ ఖచ్చితత్వం ఇంకా పెరుగుతుంది. డేవిడ్ గోస్పర్ (David Gosper) 1985 లో ఈ సూత్రం ఉపయోగించి π విలువ 17 మిలియను దశాంశ స్థానాల వరకు లెక్క కట్టగలిగేడు.

ఈ రకం "సూత్రాలు" రామానుజన్ 17 తయారు చేసేరు. ఇతరులు తయారు చేసినవి, లేకపోలేదు. కాని అవి పైన చూపిన సూత్రం అంత జోరుగా అభిసరణ (converge) చెందుతూన్నట్లు లేవు.

ఉదాహరణ 2:

ఈ రెండవ ఉదాహరణని ఆధునిక కలన యంత్రాల దృక్పథంతో చూద్దాం. ఇక్కడ π విలువ గణించడానికి రామానుజన్ ఇచ్చిన మరొక సూత్రాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఈ సూత్రం బొమ్మ 10.2 లో చూపెడుతున్నాను.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

బొమ్మ 11.2 రామానుజన్ π విలువ కట్టడానికి ఇచ్చిన మరొక సూత్రం

ఉదాహరణ 1 లో ఇచ్చిన సూత్రం అభిసరణ చెందినంత జోరుగా ఇది చెందదు. కాని ఈ రెండవ సూత్రానికి కొన్ని విలక్షణమైన లక్షణాలు ఉన్నాయి: (1) బొమ్మ 11.2 లో చూపిస్తూన్నది కూడ అనంత శ్రేణే. ఈ శ్రేణిలో కనిపించే ప్రతి పదంలోనూ 2^n వంటి అంశం కనిపిస్తూ ఉంటుంది. కొంచెం గణిత దృష్టి తో చూడాలి; కొట్టొచ్చినట్లు కనబడదు. దీని పర్యవసానం ఏమిటంటే ఈ శ్రేణిలోని పాక్షిక మొత్తాలని (partial sums) దశాంశ నుండి ద్వియాంశ (decimal to binary) లోకి మార్చినప్పుడు ఆ మార్పు దోషరహితంగా జరుగుతుంది. కంప్యూటర్లు పనిచేసేది ద్వియాంశ మాధ్యమంలోనూ, మనం పని చేసేది దశాంశ మాధ్యమంలోనూ కనుక దశాంశ నుండి ద్వియాంశ లోకి, ద్వియాంశ నుండి దశాంశ లోకి మారినప్పుడల్లా కలనం దోషరహితంగా జరగడం వల్ల లాభం ఉంటుంది. అనగా, దశాంశ–ద్వియాంశ మార్పు జరిగినప్పుడు కలన దోషాలు జొరబడి లెక్క లోని ఖచ్చితత్త్వం పాడు కాదు. (2) తగినన్ని పదాలని కలిపిన తరువాత కొంత ఖచ్చితత్త్వం వస్తుంది కదా. ఇప్పుడు మరికొన్ని కొత్త పదాలని కలిపి ఆ ఖచ్చితత్త్వం మరికొంచెం పెంచడానికి ప్రయత్నం

చెయ్యవలసి వస్తే (అంటే, దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే అంకెల పొడుగుని పెంచవలసి వస్తే) లెక్కని మొదటి నుండీ తిరిగి చెయ్యక్కర లేకుండా కొత్త పదం కలిపినప్పుడల్లా ఖచ్చితత్త్వం 6 ద్వింకముల (bits) ప్రాప్తికి పెరుగుతూ ఉంటుంది.

ఈ గొడవ అంతా అర్థం అవాలంటే ఒక్క అడుగు వెనక్కి వేసి బొమ్మ 11.2 లో చూపించిన సూత్రాన్ని అర్థం చేసుకుందుకి ప్రయత్నిద్దాం. బొమ్మ 11.2 లో ఉన్న మొదటి పదాన్ని పరిభాషలో ద్విపద గుణాంకం (binomial coefficient) అంటారు. దీని విలువ ఉరమరగా లెక్క కట్టడానికి ఈ దిగువ బొమ్మ 10.3 లో చూపిన స్టర్లింగ్ సూత్రం (Stirling formula) ఉపయోగిస్తారు:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

బొమ్మ 11.3 స్టర్లింగ్ సూత్రంతో ద్విపద గుణాంకం విలువ ఉరమరగా

ఈ విలువని బొమ్మ 11.3 లో చూపించిన అనంత శ్రేణిలో ప్రతిక్షేపించి, బీజగణితం ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరిస్తే (గణితంతో కుస్తీ పట్టే అలవాటు ఉంటే అది ఇక్కడ ఉపయోగిస్తుంది) అనంత శ్రేణిలోని ప్రతి పదమూ ఒక భిన్నం రూపంలో కనబడుతుంది. (ఈ ప్రయత్నం కాగితం, కలం తీసుకుని చేసి చూడండి.) అప్పుడు ఆ భిన్నం లోని లవం (numerator) 2^{6n} వలె ఉంటుంది, హారం (denominator) $2^{(12n + 4)}$ వలె ఉంటుంది. ఈ లెక్కంతా చేసేస్తే ఈ భిన్నం రూపం ఈ దిగువ చూపినట్లు ఉంటుంది.

$2^{6n}\ 2^{\ (12n + 4)} = 2^{\ -(6n + 4)}$

అనగా n విలువ పెరుగుతున్న కొద్దీ ఈ పదం విలువ తరుగుతూ ఉంటుంది. అంటే శ్రేణి విలువ పెరిగిపోకుండా అభిసరణ చెందుతుంది. జరుగుతున్న ప్రక్రియ ఇంకా సుబోధకం కాదానికి ఈ శ్రేణిలోని మొదటి మూడు పదాలని లెక్క కట్టి బొమ్మ 11.4 లో చూపుతున్నాను.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{5}{16} + \frac{376}{65536} + \frac{19224}{268435456} + \cdots$$

బొమ్మ 11.4 బొమ్మ 11.2 లోని మొదటి మూడు పదాలు

ఈ శ్రేణిలో కేవలం మొదటి పదాన్ని మాత్రమే తీసుకుంటే

1 = 516 = 0. 3125 లేదా = 3.2

ఇలా రెండు లగాయతు మిగిలిన పదాలని కత్తిరించడం వల్ల కత్తిరింపు దోషం (truncation error) ఉరమరగా రెండవ పదం అంత ఉంటుంది. అనగా 0.0057373 ప్రాప్తిలో ఉంటుంది.
ఈ శ్రేణిలో కేవలం మొదటి రెండు పదాలని మాత్రమే తీసుకుంటే

1 = 516 + 37665536= 0. 318237 లేదా = 3.1423

ఇలా మూడు లగాయతు మిగిలిన పదాలని కత్తిరించడం వల్ల కత్తిరింపు దోషం ఉరమరగా మూడవ పదం అంత ఉంటుంది. అనగా 0.00007161 ప్రాప్తిలో ఉంటుంది.

కుతూహలం ఉన్నవారు ఈ దిగువ ఇచ్చిన ఆధార గ్రంథాలని పరిశీలించగలరు.

ఆధారాలు:

1. Ramanujan, S., "Modular functions and approximations to π," *Quarterly J of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 15, pp 350–372, 1914.

2. Beckman, Peter, *A History of* π, The Golem Press, 1977.

3. Borwein, Jonathan M. and Borwein, Peter B. *Pi and the AGM: A Study of Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley & Sons, 1986.

4. Borwein, Jonathan M. and Borwein, Peter B., "Ramanujan and π," *Scientific American*, pp 112–117, Feb 1988.

5. Berndt, Bruce C., "Ramanujan's Series for 1/π: A Survey," *American Mathematical Monthly*, Aug/Sep 2009. Available here: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.158.2533rep=rep1type=pdf

6. Borwein, J. M. Borwein, P. B. and Bailey, D. H., "Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi: or How to Compute One Billion Digits of π," http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Hasse/00029890.di991740.99p0456b.pdf

7. Approximations of π: http://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_of_%CF%80

సాంకేతిక పదాలకి అర్థాలు

అనంతం	infinity
అపసరణం	divergence
అపసరణ శ్రేణి	divergent series
అపసృత శ్రేణి	divergent series
అపురూప	unitary
అవ్యక్త రాశి	unknown variable
అనిష్ప సంఖ్యలు	irrational numbers
అరుస – అడ్డు వరుస	row
అవకలనం	differentiation
అవధీకృతం	bounded
అవధీకృతమైన మొర్రి	bounded gap
అసమీకరణం	inequality
అంక శ్రేణి	arithmetic series
అంశిక భిన్నాలు	partial fractions
ఆగ్నేయం	south–east
ఆధారం	base, support

ఈశాన్యం	north–east
ఊహా సంఖ్యలు	imaginary numbers
ఏకైక	unique
ఒంపుల ప్రధాన సంఖ్య	curved–digit prime
అంకగణితం	arithmetic
అంకె	numeral
అనుక్రమం	sequence
కచిక ప్రధాన సంఖ్య	palindrome prime
కత్తిరింపు దోషం	truncation error
కనిష్ఠ ఊర్ధ్వ అవధి	least upper bound
కర్ణం	diagonal, hypotenuse
కలనగణితం	calculus
కలుపుగోలు సంఖ్యలు	amicable numbers
కల్పన సంఖ్యలు	imaginary numbers
కల్పన అక్షం	imaginary axis
కవలలు	twins
కారణాంకాలు	factors

కీలక బద్దీ	critical strip
కీలక రేఖ	critical line
క్రమ కారణాంకాలు	proper factors
క్రమ విభాజకాలు	proper divisors
ఖచ్చితత్త్వం	accuracy
గణన సంఖ్యలు	counting numbers
గణాంకశాస్త్రం	statistics
గణిత వ్యక్తీకరణం	mathematical expression
గణిత సమాసం	mathematical expression
గుణాంకం	coefficient
గుణోత్తర శ్రేణి	geometric series
గుళిక వాదం	quantum theory
ఘనం	cube
ఘనమూలం	cuberoot
ఘనీకరించు	raise to the power 3
చక్రీయ ప్రధాన సంఖ్య	cyclic prime number
చలనరాసి	variable

జంట తలం	complex plane
జంట సంఖ్యలు	complex numbers
జ్ఞాతులు	cousins
తరచుదనం	frequency
తర్కబద్ధమైన	rational, logical
దోషం	error
ద్విపద విస్తరణ	binomial expansion
ద్విపద గుణాంకం	binomial coefficient
ద్విపద సిద్ధాంతం	binomial theorem
ద్వియాంశ	binary
ద్వింకము	binary digit, bit
ధన సంఖ్యలు	positive numbers
నిజ అక్షం	real axis
నిజ సంఖ్య	real number
నిష్పత్తి	ratio
నిష్ప సంఖ్యలు	rational numbers
నైరుతి	south–west

పదం	term
పనికిమాలిన	trivial
పరికర్త	operator
పరిధి	circumference
పరిపూర్ణ సంఖ్యలు	perfect numbers
పరిబద్ధం	bounded
ప్రమేయం	function
పాక్షిక మొత్తం	partial sum
పూర్ణ సంఖ్యలు	integers, whole numbers
పూర్ణాంకాలు	integers, whole numbers
పోగుల వాదం	string theory
ప్రధాన సంఖ్యల శిష్టాభిప్రాయం	Twin Prime Conjecture
ప్రధాన సంఖ్యలు	prime numbers
ప్రధాన సంఖ్యా సిద్ధాంతం	The Prime Number Theorem
ప్రధాన కారణాంకాలు	prime factors
బీజం	alphabetic character, letter
బీజగణితం	algebra, math using letters

బీజ సమీకరణం	algebraic equation
భాగ	degree
భాగఫలం	quotient, result of division
భిన్నం	fraction, different
మాత్రుక	matrix
ముఖా–ముఖీ	one–to–one
మూల బిందువు	origin
నవజాగృతయుగం	renaissance era
నిరపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు	absolute prime numbers
నిరుస – నిలువు వరుస	column
రుణ సంఖ్యలు	negative numbers
లబ్ధం	product, result of multiplication
లోకోత్తర సంఖ్య	transcendental number
వర్గమూలం	square root
వర్గ రూపం	quadratic form
వాయవ్యం	north–west
వాస్తవ సంఖ్యలు	real numbers

విభక్తం	quotient, result of division
విభాజకం	divisor
వ్యక్తీకరణం	expression
శూన్యస్థానాలు	zeros, roots
శిష్టాభిప్రాయం	conjecture
సంఖ్య	number
సంఖ్యా గణితం	number theory
సంఖ్యా రేఖ	number line
సంధి సూత్రాలు	composition rules
సంవర్గమానం	logarithm
సంవర్గమానం, సాధారణ	logarithm to base 10
సంవర్గమానం, నేపియర్	logarithm to base e
సంవృతం	closure
సరళ రేఖ	straight line
సహజ సంఖ్యలు	natural numbers
సాంద్రత	density
సాంఖ్యం	science

సార్వత్రిక వర్గ రూపాలు	universal quadratic forms
హరాత్మక శ్రేణి	harmonic series