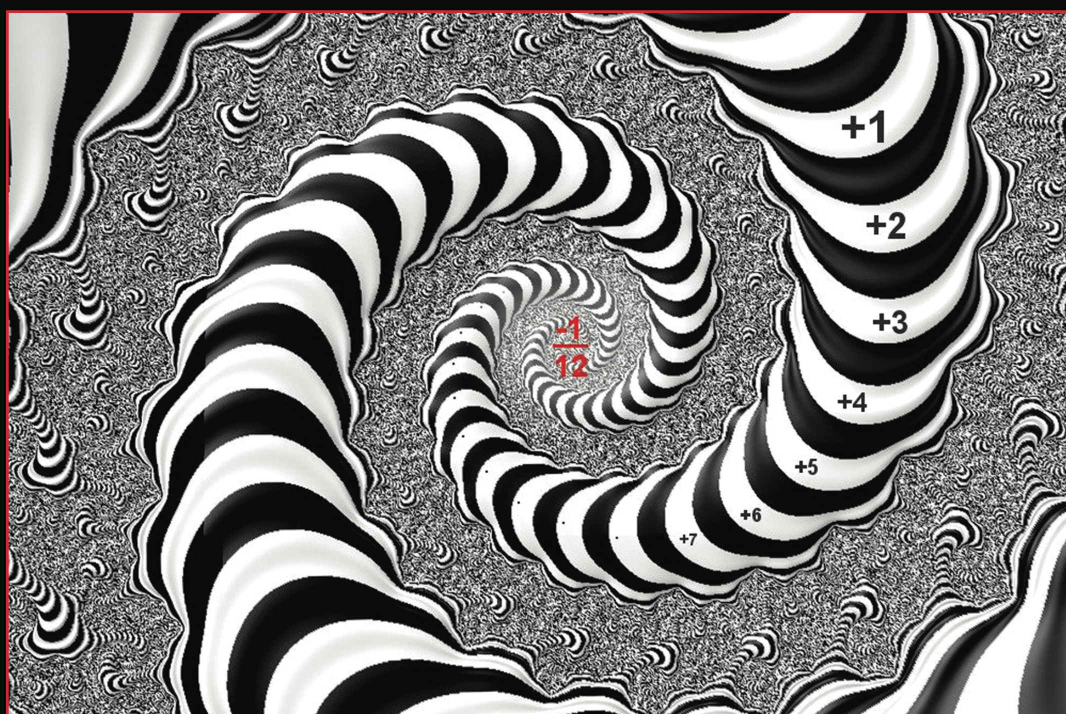
ఒకటి, రెండు, మూడు
అనంతం



వేమూరి వేంకటేశ్వర రావు

తొలిపలుకు

అంకెలతోను, సంఖ్యలతోను ఆడుకోవడమే ఈ పుస్తకం ముఖ్యోద్దేశం. సంఖ్యా జ్ఞానం, సంఖ్యా గణితం నలుగురికీ అందుబాటులోకి తీసుకురావాలని చేసిన ప్రయత్నం ఇది. భాష మీద ఏ కొద్దిపాటి ఆసక్తి ఉన్నా ఈ పుస్తకం మీకు నచ్చవచ్చు. గణితంతో ఏ కొద్దిపాటి పరిచయం ఉన్నా, లేకపోయినా ఈ పుస్తకంలోని విషయం మీకు అందుబాటులోఉంటుందనే నా నమ్మకం. స్థాలీపులాక న్యాయంలా ఏవో నాలుగు మెతుకులు చిదిమి చూపిస్తాను. ఈ పుస్తకం చదివిన తరువాత గణితం మీద కొంతైనా కుతూహలం పుడుతుందనే నా ఆశ.

అంకెలతోను, సంఖ్యలతోను ఆడుకోవడమంటే? అంకెలు, సంఖ్యలు మన జీవితాలలోకి, మన సంస్కృతిలోకి, మన భాషలోకి ఎలా జొరబడ్డాయో పరిశీలించడమే నా గమ్యం. మరీ పాఠ్య పుస్తకంలా కాకుండా కేవలం కబుర్లు చెప్పుకుంటున్నట్లు మొదలు పెట్టి, క్రమేపి ఈ భావాలు, చాప కింద నీరులా, గణితంలోకి ఎలా ప్రవేశించేయో చెబుతాను. గణితంలో కుతూహలం ఉండి నేర్చుకోవాలనే సద్యోజాత ఆసక్తి ఉన్నవారు నేను అమర్చిన క్రమంలో చదివితే మార్గం సుగమం అవుతుంది.

మొదటి పదకొండు అధ్యాయాలలోను ఒకొక్క అంకెకి కానీ సంఖ్యకి కానీ భాషాపరంగా ఉన్న ప్రత్యేక స్థానాన్ని చర్చించేను. తరువాత అయిదు అధ్యాయాలలోను పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల అవసరం చూస్తారు. తరువాత 16 నుండి 21 వరకు అధ్యాయాలలోను గణిత సంబంధమైన అంశాలు, అనంతాలు అందరికి అందుబాటులోఉండే స్థాయిలో కనబడతాయి. చివరి నాలుగు అధ్యాయాలలో గణితంతో చెలగాటాలు కనిపిస్తాయి.

ఈ వ్యాసాలు చాలామట్టుకు “చైతన్యం - సంకల్పబలం” (http://chaitanyam.net/) అనే జాల పత్రికలోనూ, కొన్ని “ఈమాట” (https://eemaata.com/em/about) అనే జాల పత్రికలోనూ నెల నెలా ధారావాహికగా వచ్చేయి. చదివిన తరువాత మీ అభిప్రాయం తెలియజేయగలరు.

అట్టమీది బొమ్మ: శ్రీ సాయి బ్రహ్మానందం గొర్తి

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు
ప్లెజంటన్ , కేలిఫోర్నియా (2023)

విషయసూచిక

1. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఒకటి
2. అంకెలు, సంఖ్యలు: రెండు
3. అంకెలు, సంఖ్యలు: మూడు
4. అంకెలు, సంఖ్యలు: నాలుగు
5. అంకెలు, సంఖ్యలు: అయిదు
6. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఆరు
7. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఏడు
8. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఎనిమిది
9. అంకెలు, సంఖ్యలు: తొమ్మిది
10. అంకెలు, సంఖ్యలు: పది నుండి 99 దాకా
11. అంకెలు, సంఖ్యలు: 100 నుండి "తొర్రి పంతులు" దాకా
12. అంకెలని రాసే పద్ధతులు
13. భారతీయ లెక్కింపు పద్ధతి
14. అంతర్జాతీయ లెక్కింపు పద్ధతి
15. పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల అవసరం
16. సంఖ్యలలో రకాలు: సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణ సంఖ్యలు
17. సంఖ్యలలో రకాలు: నిష్ప, అనిష్ప, లోకోత్తర సంఖ్యలు
18. జంట సంఖ్యలు
19. అనంతాలు
20. ప్రధాన సంఖ్యలు
21. ప్రధాన సంఖ్యలలో కవలలు
22. అంకెలు అతని సంగడికాళ్ళు
23. అంకెలు, సంఖ్యలు: అర్థగర్భితమైన శ్లోకాలు
24. త్రిభుజ సంఖ్యలు
25. చతురస్ర సంఖ్యలు
26. మీకు తెలుసా?
27. వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు ఇతర రచనలు

1. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఒకటి

అంకెల గురించీ, సంఖ్యల గురించీ చెప్పటం మొదలెట్టేనంటే కాసీ మజిలీ కథలలా ఒకంతట తెమలవు. ముందు 'ఒకటి' తో మొదలు పెడతాను.

'ఒక' నే కొందరు 'వక' అనీ, మరికొందరు 'వొక' అనీ రాస్తారు. కాని 'ఒక' ఒక్కటే ఒప్పు; మిగిలిన రెండు ప్రయోగాలు తప్పు – అని నాదొక అభిప్రాయం. మరొక అభిప్రాయానికి మరొకరిని సంప్రదించండి.

'ఒక' అన్నా 'ఒంటి' అన్నా ఒక్కటే. 'ఒంటె" అంటే మాత్రం లొటిపిట అనే జంతు విశేషం.

మగవాడిని ఉద్దేసించి, 'ఒంటరి' అంటే ఎవ్వరితోటీ సాంగత్యం లేకుండా ఉన్న వాడనో, పెళ్ళికాని వాడనో, నాతి గల బ్రహ్మచారి అనో అర్థాలు స్ఫురిస్తాయి కాని నిఘంటువు ప్రకారం ఒంటి + అరి = ఒంటరి, అనగా అసహాయుడైన బంటు. సైన్యంలో పదాతులని (బంటులని) కూడ 'ఒంటరులు' అనే ఒకప్పుడు అనేవారు. సైనిక దళంలో ఉన్నవాళ్ళు ఒంటరి వాళ్ళు ఎలా అవుతారు? అసహాయులు ఎలా అవుతారు?

ఒంటి బ్రాహ్మణుడు ఎదురు రావటం మంచి శకునం కాదంటారు.

అర గంట కాని వేళలో గోడ గడియారం ఒకే ఒక గంట కొడితే అప్పుడు ఒంటిగంట అయినట్లు లెక్క.

'ఒకే ఒక' అని నొక్కి వక్కాణించవలసి వస్తే 'ఒక్క' అని 'క' ని నొక్కి పలికితే సరిపోతుంది. లేక 'ఒక్కగానొక్క' అని అనొచ్చు.

'ఒకానొక' అంటే 'ఏదో ఒక' అనే అర్థం స్పురిస్తుంది. 'ఒకప్పుడు' అంటే 'ఒక వేళ, ఒక నాడు' మొదలైన అర్థాలు చెప్పుకోవచ్చు. కాని 'ఒక వేళ' అన్నప్పుడు 'అయితే, గియితే' అనే అర్థం కూడ వస్తుంది.

'ఒండు' అంటే కన్నడం లోనే కాదు, తెలుగులో కూడ 'ఒకటే'. నా మాట మీద నమ్మకం లేకపోతే 'ఒండొరులు' అనే ప్రయోగం చూడండి.

జీవితాంతం ఒకే భార్యతో ఉంటే వాళ్ళు 'ఏకపత్నీ వ్రతులు.'

ఒకే కడుపున పుట్టిన వారు ఏకోదరులు. ఒకే ఒక అంకం ఉన్న నాటికని 'ఏకాంకిక' అంటారు. ఒకే భూమి మీద ఎల్లప్పుడు ఒకే రకం పంటని సాగు చేస్తే దానిని ఏకసాయం ('మోనోకల్చర్') అంటారు. పంటలని మార్చుతూ రకరకాల పంటలని పండించే వ్యవసాయాన్ని బహుసాయం అనొచ్చు.

'ఏక' సంస్కృతం అయినప్పటికీ, తెలుగులో 'ఒక' మాటల కంటె 'ఏక' మాటలే ఎక్కువ. బ్రహ్మ స్వరూపాన్ని ఒకే ఒక అక్షరంతో వర్ణించాలంటే ఏకాక్షరమైన 'ఓం' ని వాడాలి 'ఓమిత్యేకాక్షరం బ్రహ్మ' అన్నది ఉపనిషద్వాక్యం.

'ఏక మతిత్వం ' అన్న మాటలే 'ఐకమత్యం' గా మారేయి. ఏకీభావమే ఐక్యం. ఆంధ్రులలో ఏకమతిత్వం తక్కువ కనుక, ఆంధ్రులు భారతదేశానికి దేవుడు ఇచ్చిన బహుమతులు.

'ఏక' తోక దగ్గర వచ్చే పదాలకి 'ప్రత్యేక, తదేక' అనేవి రెండు ఉదాహరణలు.

'ఏకాంతం' అంటే కోరుకుని, కావాలని ఒంటరిగా ఉండటం. 'ఒంటరితనం' అంటే తన అభీష్టానికి వ్యతిరేకంగా ఏకాంతంగా ఉండటం.

ఒంటరిగా ఉన్న వ్యక్తిని 'ఏకాకి' అని లోకులు అంటారు కాని, 'కావు, కావు' అని అవి అరిచినప్పుడల్లా 'కాకులు ఏకాకులు కావు' అని మనం గమనించాలి. 'ఏకాక్షీ లోక కంటకీ' అని కాకుల మీద ఎందుకో ఉండేలు దెబ్బ.

ఒకసారి వింటే కంఠతా వచ్చే వారిని 'ఏకసంథాగ్రాహి' అంటారు.

'ఏకాగ్రత' అంటే ఒకే అంశం మీద దృష్టి నిలపటం అని ఏకగ్రీవంగా తీర్మానం చెయ్యవచ్చు.

'ఏకాహం' అంటే ఒకే దినం చేసే కర్మ కాండ అనే వారితో నేను ఏకిభవిస్తాను.

'ఏకాండీగా ఉన్న తాను' అంటే ఏక ఖండమైన బట్ట అని వివరణ.

కౌరవ సభలో ద్రౌపది ని ఏకవస్త్ర అన్నప్పుడు "ఒకే గుడ్డ కట్టు కొన్నది" అని అనిపిస్తుంది. ఇక్కడ ఏక అంటే ఒకటి అని కాదు. ఇక్కడ ఏక అంటే – అదే (same) – అని అర్థం చెప్పాలి. రజస్వల ఆ మూడు రోజులు స్నానం లేకుండా ఆ నాటి వస్త్రాలతోనే ఉంటుంది. (పూర్వపు రోజుల్లో లేండి). కాబట్టి ఆ మొదటి నాటి వస్త్రాలతోనే ఉండేది. కాబట్టి ఏక అంటే "సేమ్" అని చెప్పాలి.

ఏక వేణీ ధర – కూడా ఇలాంటిదే. భర్తృ విరహంలో కేశ సంస్కారం చేసుకోకుండా మునుపటి జడతోనే ఉండేది. అందులో ఒక జడా? రెండు జడలా? మూడు జడలా? అనే ప్రశ్న ఉత్పన్నం కాదు.

తెలుగులో పది నీ ఒకటి నీ కలిపితే పదునొకటి వస్తుంది. పది నీ ఒండు నీ కలిపితే పదకొండు వస్తుంది. కాని సంస్కృతంలో అదే వరసలో దశ నీ ఏక నీ కలిపితే 'దశేక' అవుతుంది. అందుకని, మాటలని తిరగేసి, "ఏక' నీ 'దశ' నీ కలిపి ఏకాదశి చెయ్యాలి. ఇది తెలుగుకి, సంస్కృతానికి ఉన్న తేడాలలో ఒకటి.

వ్యాకరణంలో సంధి కార్యం జరిగినప్పుడు రెండు అక్షరాల స్థానంలో ఒకే ఒక అక్షరం ఆదేశంగా వస్తే దానిని ఏకాదేశ సంధి అంటారు.

ఆలోచించించిన కొద్దీ 'ఏక' మాటలు ఎన్నో మనస్సుకి తడతాయి: ఏకాంకిక, ఏకవచనం, ఏకపాత్రాభినయం, ఏకోదరులు, ఏకత్వం, ఏకావళి, ఏకశిల, ఏకభాష్యం, ఏకభాషణ, ఏకేశ్వరోపాసన, ఏకదిష్టం, ఏకశృతం.

మహాభారతానికీ, 'ఏక' కీ మధ్య విచిత్రమైన సంబంధం ఉంది. మహాభారతం రాయటానికి గణపతి తన దంతాలలో ఒక దానిని విరచి దానిని ఘంటంగా వాడేడనీ, అందుకే గణపతి ఏకదంతుడయాడనీ ఐతిహ్యం. తగలడిపోతూన్న లక్క ఇంట్లోంచి బయటపడి పాండవులు ఏకచక్రపురం చేరుకుంటారు. ఏకలవ్యుడి కథ కూడ భారతం లోనిదే.

గణితంలో 'ఏకాంతర కోణం' అన్నప్పుడు 'ఏకాంతర' అంటే 'ఒకటి విడచి మరొకటి' (alternate) అని అర్థం. రెండు సమాంతర రేఖల్ని ఒక తిర్యక్ రేఖ (transversal) ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాలని ఏకాంతర కోణాలు అంటారు.

గణితంలో 'ఒకటి' ముఖ్య సంఖ్య ('కార్డినల్ నంబర్'), 'ఒకటవ' అన్నది క్రమ సంఖ్య ('ఆర్డినల్ నంబర్').

గణితం దృష్టిలో 'ఒకటి' బేసి ('ఆడ్') సంఖ్య, నిజ ('రియల్') సంఖ్య, ధన ('పాజిటివ్') సంఖ్య, సహజ ('నేచురల్') సంఖ్య, పూర్ణాంకం ('ఇంటిజర్'), మరియు నిష్ప ('రేషనల్) సంఖ్య. విచిత్రం ఏమిటంటే 'ఒకటి' ని ప్రథాన ('ప్రైం') సంఖ్యల జాబితాలో వెయ్యరు.

ఈ రోజులలో గ్రీకు, లేటిన్ భాషల ప్రభావాన్ని తప్పించుకు తిరిగేవాడు ధన్యుడు కాడు కనుక .... గ్రీకు భాషలో 'మోనో' అంటే 'ఏక.' అందుకనే ఏకాంతంగా బతికేవాడిని వారు 'మోనోకోస్' అంటారు. ఇందులోంచే 'మంక్' (monk) అన్న మాట వచ్చింది. ఇటువంటి వారిని మనం 'ఏకాకి' అనొచ్చు. ఏకాంతంగా బతికేవాడు ఎవ్వరితో మాట్లాడతాడు? అందుకని మౌనంగా ఉంటాడు. అలా ఉండే వాడే మౌని, లేదా ముని. ఈ మొనాకోస్ నుండి వచ్చినదే 'మోనార్క్' లేదా ఏకచ్ఛత్రాధిపతి అన్న మాట.

ఈ మోనో కి ముందు 'ఏంటీ' చేర్చితే 'ఏంటిమొనీ' అనే రసాయనిక మూలకం పేరు వస్తుంది. ఏంటీమొనీ అంటే ప్రకృతిలో ఏకాంతంగా దొరకనిది అని అర్థం. 'ఏంటీ' ని 'ప్రతి' అనే పూర్వ ప్రత్యయంతో తెలిగించ వచ్చు కనుక 'ఏంటిమొనీ' ని కావలిస్తే 'ప్రత్యేకాంతం' అని తెలిగించ వచ్చు. కాని ఇప్పటికే 'ఏంటిమొనీ' కి నీలాంజనం, కపోతాంజనం, యామునం అని మూడు పేర్లు ఉన్నాయి కాని, వాటినే ఎవ్వరు వాడటం లేదు – ఇంగ్లీషు మోహంలో పడిపోయి. ఇప్పుడు నేను కొత్త పేరు పెడితే వాడతారా?

రసాయన శాస్త్రం లో ఏకాకిగా ఉండే చక్కెరని 'మొనోశేఖరైడ్' అంటారు. కాఫీలో వేసుకునే చక్కెర జంట చక్కెర; మొనోశేఖరైడ్ కాదు.

లేటిన్ నుండి వచ్చిన 'యూని,' గ్రీకు నుండి వచ్చిన 'మోనో' అన్న ప్రత్యయాలతో ఇంగ్లీషులో ఎన్నో మాటలు ఉన్నాయి: యూనిట్, యునీక్, యునైట్, యూనిటీ, యూనివర్స్, మొనోపలీ, మొనొక్రొమేటిక్, మొదలైనవి. 'మొనోలిథిక్' అంటే ఏకశిల.

‘మోనో’ అంటే ‘ఒక.’ ‘టోన్’ అంటే ‘స్వరం’. కనుక ‘మొనోటనస్’ అంటే ఎగుడు దిగుడు లేని ఒకే ఒక స్వరస్థాయి. ఇలా ఉదాత్త, అనుదాత్తాలు లేకుండా – అంటే, మొనోటనస్ గా - ఉండే కార్యక్రమాలు బోరు కొడతాయి. కనుక ఈ ‘ఒక’ సోది మొనోటనస్ గా తయారవక ముందే ఇక్కడ ఆపు చేస్తాను.

2. అంకెలు, సంఖ్యలు: రెండు

రెండు కి సంబంధించిన మాటలు తెలుగులో జోడీ, జోడు, జత, జంట, ఇరు, ఉమ్మడి అన్న మాటలలోనూ, సంస్కృతంలో యుగళ, యుగ్మ, ఉభయ, ద్వి, ద్విగు, ద్వంద్వ, ద్వయి, ద్వైత, మొదలైన రూపాలలోను కనిపిస్తాయి.

జోడీలు అంటే జతలు, జంటలు. జోళ్ళు అంటే పాదరక్షలు; ఈ జంటలో ఒకే ఒక దానిని గురించి మాట్లాడవలసి వచ్చినప్పుడు దానిని పాదరక్ష అనో, చెప్పు అనో చెప్పవచ్చు. సులోచనాలని కళ్ళజోడు అని మనం అంటే, ముక్కుజోడు అని తమిళులు అంటారు.

ఈరు, ఇరు అన్నప్పుడు రెండు, ఇద్దరు అని రెండర్థాలు ఉన్నాయి. ఈరారు అంటే 12, ఈరేడు అంటే 14, ఈరెనిమిది 16.

ఇరుకెలకులు, ఇరుచక్కి, ఇరుదిసలు, ఇరువంకలు – ఈ మాటలన్నిటికి 'రెండు పక్కలు' అని అర్థం.

ఇరుగు, పొరుగు వారితో సఖ్యంగా ఉండాలంటే వారితో ఉమ్మడి వ్యాపారం చెయ్యకూడదు.

యుగళ గీతం అంటే 'డూయట్' లేదా ఇద్దరు పాడే పాట. ఈ ఇద్దరిలోను ఒకరు ఆడ, మరొకరు మగ అవాలని నిబంధన ఉందో, లేదో నాకు తెలియదు. ఇద్దరు మగవాళ్ళు యుగళగీతం పాడడం నేనెప్పుడూ వినలేదు.

యుగళ అనే మాట యుగ్మం లోంచి వచ్చింది. పూజ చేసేటప్పుడు 'వస్త్రయుగ్మం సమర్పయామి' అన్నప్పుడు, పంచ, కండువా కాని, చీర, రవికల గుడ్డ అని కాని మనం అర్థం చేసుకోవాలి.

ఈ యుగ్మం లోంచి వచ్చినదే యోగ అన్న మాట. యోగం అంటే మనస్సునీ, శరీరాన్నీ సంధించటం. అంటే మనస్సు అధీనం లోకి శరీరాన్ని తీసుకురావటం. ఈ ప్రక్రియలో యోగాసనాలు ఒక చిన్న భాగం మాత్రమే.

స్త్రీ యొక్క అండంతో పురుషుడి బీజం సంయోగం చెందిన తర్వాత మిగిలేదే యుగ్మం + అండం = యుగాండం, లేదా ఇంగ్లీషులో 'జైగోట్'. మనం బజారులో కొనుక్కునే కోడిగుడ్డు అండమా, యుగాండమా అని నాకు ఇప్పటికీ అనుమానం నివృత్తి కాలేదు.

రెండు వేదాలు చదివిన పండితుడు ద్వివేది. వేదుల, ద్వివేదుల అన్న ఇంటిపేర్లు తెలుగు వారిలో బాగానే కనిపిస్తాయి కాని, త్రివేదుల, చతుర్వేదుల కొంచెం తక్కువ, మనలో. ఉత్తరాది వారిలో త్రివేదీ, చతుర్వేదీ బాగా కనిపిస్తారు. వేదుల వారు మాత్రం ఒంటి వేదుల వారే.

రెండు భాషలు వచ్చిన ఆసామీ దుబాసీ. ఇదే మాటని 'ట్రాన్స్‌లేటర్' అన్న అర్థంలో మనం వాడేస్తూ ఉంటాం.

వైష్ణవుడు అయినవాడు జపించవలసిన మంత్రాలలో ద్వయం ఒకటి. "శ్రీమన్నారాయణ చరణౌ శరణం ప్రపద్యే. శ్రీమతే నారాయణాయనమః" అనేది ద్వయ మంత్రం. దీనినే మంత్రరత్నం అని కూడ అంటారు.

మధ్వాచార్యులవారు స్థాపించిన శాఖ ద్వైతం. అహం బ్రహ్మాస్మి అంటే వీరు ఒప్పుకోరు. జీవాత్మ, పరమాత్మ ద్వివిధమైన ఆత్మలు అని వీరి సిద్ధాంతం.

మహాభారతంలో ద్వైతవనం అనే అడవి కనిపిస్తుంది. కాని ఈ అడవిలో ఉన్న ద్వైతం ఏమిటో?

కలనేత వస్త్రాన్ని హిందీలో 'దోరంగి' అంటారు. అంటే రెండు రంగుల బట్ట. ఈ 'దో' లోంచి వచ్చినదే 'దోయి'. కనుదోయి, చనుదోయి అన్నవి తెలుగు మాటలే. రెండు చేతులని కలిపి దొన్నెలా చేస్తే వచ్చేది దోయిలి. దీన్నే మనం దోసిలి అని కూడ అంటాం.

కంప్యూటర్లు వాడకం లోకి వచ్చేక ద్వియాంశ ('బైనరీ') పద్ధతి పరపతి పెరిగింది; అంతవరకు అంకెలని దశాంశ పద్ధతిలోనే లెక్కించేవారు.

ద్వితీయం అంటే రెండవది. కాని, రెండవ పెళ్ళి అన్న అర్థం లోనే ఎక్కువగా వాడతారు. అద్వితీయం అంటే మొదటిది అనే అర్ధం – మొదటి పెళ్ళి అని కాదు. ఆలోచిస్తే "మొదటి పెళ్లి" అనే పదబంధానికి అర్థం లేదు.

జీవశాస్త్రంలో ప్రతి జంతువుకీ, మొక్కకీ ద్వినామ ('బైనరి') పద్ధతిలో పేర్లు పెడతారు; మొదటిది జాతి పేరు, రెండవది శాల్తీ పేరు. మనకి ఇంటి పేరు, పెట్టిన పేరు ఉన్నట్లే ఇది కూడ.

ద్విత్వాక్షరం అంటే ఒక అక్షరం కింద మరొకటి రావటం. ద్విత్వాక్షరం అన్న మాటలో మూడు ద్విత్వాక్షరాలు ఉన్నాయి. ఒక అక్షరం కింద అదే అక్షరం పునరుక్తం అయితే అది ద్విరుక్తాక్షరం. అమ్మ, అక్క, కర్ర, కప్పు మొదలైన మాటలలో రెండవ అక్షరాలు ద్విరుక్తాక్షరాలు. ద్విత్వానికీ, ద్విరుక్తానికీ మధ్య ఉన్న ఈ తేడాని చాల మంది గమనించరు.

ద్విరదం అంటే రెండు కోరలు కలది. – ఏనుగు. రెండు కోరలు కల జంతువులు ఇంకా ఉన్నాయి కాని, సందర్భ శుద్ధి లేనప్పుడు ఏనుగనే చెప్పుకోవాలి. ద్విజిహ్వులు అంటే రెండు నాలుకలు గలవారు. అమెరికా రాజకీయ నాయకులు ఒకళ్ళకి చెయ్యమని చెప్పేది ఒకటి, వారు చేసేది మరొకటి కనుక వీరిని ద్విజిహ్వులు అంటే నేను ఏమీ అనుకోను. నేనిలా అన్నానని మనం అమెరికా వాళ్ళ మీద విరుచుకు పడిపోనక్కర లేదు. మన వాళ్ళు ఏమీ తక్కువ కాదు; వారి కంటె వీరు రెండాకులు ఎక్కువ చదివిన వారే.

ద్విపద అంటే రెండు పాదాలు కల ఒక పద్య విశేషం.

ద్విరేఫం అంటే రెండు 'రేఫ'లు – అనగా 'ర' కారాలు – కలది, భ్రమరం. దీనినే మనం తుమ్మెద అని కూడ అంటాం. ఇది ఒక జాతి తేనెటీగ.

ద్విజం అంటే రెండు జన్మలు కలది. గుడ్డు లోంచి పుట్టిన జీవులన్నీ ద్విజములే. మానవులలో రెండు సార్లు పుట్టిన వారు ద్విజులు – అనగా ఉపనయనం అయిన వారు.

రెండు జడల సీతని ద్విజడ అనొచ్చు కానీ, రెండు జడల సీత అంటేనే బావుంటుంది.

నదిలో రెండు వైపులా నీరుండి మధ్యలో నేల ఉంటే అది ద్వీపం. ద్వీపం లో పుట్టిన వాడు ద్వైపాయనుడు. అలా పుట్టిన వాడు నల్లగా ఉంటే అతగాడు కృష్ణద్వైపాయనుడు అవుతాడు. వ్యాసుడు పేరు లేని వాడు; అతని తల్లిదండ్రులు పేరు పెట్టే లోగానే అడవులలోకి తపస్సు చేసుకుందికి వెళ్ళిపోయేడు. ద్వీపంలో పుట్టిన నల్లవాడు కదా అని మొదట్లో కృష్ణద్వైపాయనుడు అని పిలచే వారు. దరిమిలా వేదాలని సంస్కరించేడు కదా అని "వ్యాసుడు" అనే బిరుదుతో పిలుస్తున్నాము. .

రెండర్థాలు ఉన్న పద్యాన్ని ద్వ్యర్థి అంటారు.

ద్విచక్కెర అంటే రెండు చక్కెరలు కలసి ఉన్న పదార్థం. మనం కాఫీ లో వేసుకునే పంచదారలో గ్లూకోజ, ఫ్రూక్టోజ అనే రెండు రకాల చక్కెరలు ఉన్నాయి కనుక అది ద్విచక్కెరే.

ఎలక్ట్రానిక్స్ లో తారసపడే కొన్ని శూన్య నాళికలో ఒక ఏనోడు, ఒక కేథోడు ఉంటాయి కనుక వీటిని 'ద్వియోడు' అనాలని నా గోడు.

ద్విగుణీకృతం అంటే రెట్టింపు చెయ్యటమే కాని, ద్విమాత్రకం అంటే రెండు కొలతలు కలది అని అర్థం. దీనిని ఇంగ్లీషులో 'టు డైమెన్షనల్' అంటారు.

రెండు కి సంబంధించిన మాటలు ఇంగ్లీషులో కొల్లలు. రెండుని ఇంగ్లీషులో 'టు' అంటాం. ఈ 'టు' స్పెలింగు 'T, W, O'. ఈ మూడింటిలో మొదటి రెండక్షరాలు అయిన 'T, W' లు పక్క పక్కని ఎప్పుడు వచ్చినా 'రెండు' అనే అర్థం స్ఫురిస్తుంది. 'ట్వైలైట్' (twilight)అంటే పగలు కాదు, రాత్రి కాదు; ఈ రెండింటికి మధ్య ఉన్న సంధ్య వేళ. 'ట్వైన్' (twine) అంటే రెండు పేటలు వేసి పేనిన దారం. మనం మరచి పోయేం కాని, దీనినే తెలుగులో జమిలిదారం అనేవారు. 'ట్విల్' (twill) అంటే రెండు రకాల దారాలతో నేసిన బట్ట. ఒక కొమ్మ చీలి రెండుగా అయితే వచ్చినది 'ట్విగ్' (twig).

డూప్లికేట్ అంటే జతలో ఒకటి. ఇదే మాటని మనం 'నకలు' అనే అర్థంలో వాడతాం. 'అసలు' రైలు బండి ఏ కారణం చేతనైనా ఆగిపోతే దాని స్థానంలో వచ్చే మరొక బండిని 'డూప్లికేటు' అనే వాళ్ళం – నా చిన్న తనం లో.

‘డూస్’ (deuce) అంటే రెండు. టెన్నిస్ లో ‘డూస్’ అన్నప్పుడు, మరి రెండు ‘పాయింట్లు’ వరుసగా ఎవ్వరు గెలిస్తే వారు ఆట గెలిచినట్లు.

‘బి’, ‘బిస్’, ‘బై’, అనే ప్రత్యయాలని జోడించి, ‘రెండు’ మాటలని ఎన్నో తయారు చెయ్యవచ్చు. రెండు సార్లు (లేదా, రెండు వైపులా) ఉడికించినది కనుక ‘బిస్కట్’ అన్నారు. రెండు పక్కలా కాల్చిన అట్టు కనకనే మన దేశ లోని ‘దో’ వచ్చిందేమో అని నాకు చిన్న ధర్మ సందేహం వస్తున్నాది. రెండు కళ్ళకీ అమరే పరికరం కనుక ‘బైనాక్యులర్స్’ అయింది. రసాయన శాస్త్రం లో రెండింతలు అనటానికి ‘బిస్’ అనే పూర్వ ప్రత్యయం వాడతారు.

రెండు సమభాగాలుగా విడదీసినప్పుడు ‘బైసెక్ట్’ అన్న మాటని వాడతాము గాని ఇక్కడ రెండుగా విడతీయటంలో చెడు ఏమి జరగలేదు. కాని, ‘డై, డిస్’ అనే ప్రత్యయాలు వాడినప్పుడు చీల్చటం, విడదీయటం అనే అర్థాలు వస్తాయి కాని, ఇక్కడ ఈ విడతీయటం మంచిది కాదు అనే అర్థం స్పురిస్తుంది. ఏ కీలుకా కీలు కోసేసేపద్ధతిని ఇండియాలో ‘డిస్సెక్ట్’ అనీ, అమెరికాలో ‘డైసెక్ట్’ అనీ అంటారు. ఈ జాతికి చెందిన మాటలే ‘డిస్రప్ట్’, ‘డిస్టర్బ్’, ‘డివోర్స్’ మొదలైనవి.

‘బైసెక్ట్’ గురించి మరొక విషయం. వృత్తలేఖిని, కొలబద్ద సహాయంతో ఒక గీతని కాని, కోణాన్ని కాని సమద్విఖండన చేయవచ్చని రేఖాగణితంలో దిట్టలయిన గ్రీకులు ఎప్పుడో కనుక్కున్నారు.

గణితంలో రెండుకి ఉన్న ప్రత్యేకత ఏమిటంటే ప్రధాన సంఖ్యలలో ఇదొక్కటే సరి సంఖ్య; మిగిలినవి అన్నీ బేసి సంఖ్యలే. రెండు ఫిబొనాచీ సంఖ్య.

రెండు రెళ్ళని కలిపినా, గుణించినా నాలుగే వస్తుంది. ఇదే విధంగా ఏ అంకెని మూడు సార్లు వేసి కలిపినా, గుణించినా ఒకే సమాధానం వస్తుందో చెప్పుకోండి, చూద్దాం. కావలిస్తే కాగితం, కలం వాడండి.

రెండు యొక్క వర్గమూలాన్ని పైథాగొరోస్ సంఖ్య అంటారు. దీనిని ($\sqrt{2}$) ఏ రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి గాను రాయలేము కనుక ఇటువంటి సంఖ్యలని అనిష్ప సంఖ్యలు (‘ఇర్రేషనల్ నంబర్స్’) అంటారు. ఇక్కడ ‘ఇర్రేషనల్’ అన్నప్పుడు తర్కాభాసమని కాకుండా ‘రేష్యొ’ (నిష్పత్తి) కాని’ అని తాత్పర్యం చెప్పుకోవాలి.

ఈ వ్యాసం ముగించే లోగా అంకెల మాటలతో చిన్న చెలగాటం ఆడదాం. ఈ దిగువ చూపిన అంకెల శ్రేఢి ('సీక్వెన్స్') వెనక ఉన్న వరస (తర్కం) ఏమిటో చెప్పుకొండి చూద్దాం?

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 1311221, …

సూచన: కొద్ది సేపు ఆలోచించినా చెప్పుకోలేక పోతేనే ఈ దిగువ ఇచ్చిన సమాధానం చూడండి. ఈ ఆట ఇంగ్లీషులో బాగా రాణిస్తుంది. తెలుగులో కూడ ప్రయత్నించి చూద్దాం. ఇక్కడ లెక్కల 'ట్రిక్కు' ఏమీ లేదు. మాటలతో చెలగాటమే. కొంచెం సేపు ఆలోచించి సమాధానం తెలియకపోతేనే దిగువ ఇచ్చిన సమాధానం చదవండి.

సమాధానం: మొదటి అంకె ఒకటి కదా. దీనిని 'ఒక ఒకటి' అని తెలుగులోనూ, 'వన్ వన్' అని ఇంగ్లీషు లోనూ అంటాము కదా. ఇంగ్లీషులో 'వన్ వన్' అని అన్నప్పుడు, మొదటి వన్ విశేషణం, రెండవది విశేష్యం. ఇప్పుడు ఈ రెండింటిని విశేష్యాలుగానే భావిస్తే 'వన్ వన్' కాస్తా 11 అవుతుంది. అవునా?

ఇప్పుడు 11 'రెండు ఒకట్లు' లేదా 'టు వన్స్' కనుక దీనిని '21' అని రాయవచ్చు. ఇప్పుడు ఈ '21' ని 'ఒక రెండు, ఒక ఒకటి,' అనొచ్చు. దీనినే ఇంగ్లీషులో అంటే, 'వన్ టు, వన్ వన్' అవుతుంది. ఇదే తర్వాత వచ్చే సంఖ్య – 1211.

ఈ 1211 ని వన్ వన్, వన్ టు, టు వన్స్' అందాం. ఇందులో మొదటి 'వన్ వన్ ని 11 గా రాద్దాం. అలాగే 'వన్ టు' ని 12 గా రాద్దాం. 'టు వన్స్' కి బదులు 21 అని రాద్దాం. ఇప్పుడు వీటన్నిటినీ గుత్తగుచ్చితే 111221 వస్తుంది. తమాషాగా లేదూ?

3. అంకెలు-సంఖ్యలు: మూడు

తెలుగులో మూడుకి సంబంధించిన మాటలు మూడింతుల ముప్పాతిక వరకు సంస్కృతం నుండి దిగుమతి అయినవే అని అనిపిస్తుంది. తెలుగులో లేకపోలేదు, కాని వాటి వాడకం మూడు పువ్వులు ఆరు కాయలుగా వర్ధిల్లడం లేదు, అంతే. ఆరు మూడైనా, మూడు ఆరైనా, “మూడు” లేకపోతే ఇటువంటి రాతలు చదవ బుద్ధి కాదు కనుక మూడు నిమిషాల పాటు అ మూడేదో తెచ్చుకుని ఈ తరువాయి చదవండి.

సాహిత్యంలో నాయికా ప్రకరణంలో ముగ్ధ, మధ్య, ప్రగల్భ అని నాయికలను వాళ్ల స్వభావాలనుబట్టి మూడు రకాలుగా విభజించారు.

ముప్పావలా అంటే మూడు పావులాలు. ముప్వన్నె అంటే మూడు రంగులు. ముప్పురు అంటే ముగ్గురు. ముప్వంద అంటే మూడు వందలు. 'ముప్వంద = మూడుయైన వందలు' అనేదానిలో సంఖ్య ఉండడం వల్ల ద్విగు సమాసం అవుతుంది. 'ముప్వంద' అనే దానిని వాక్యంలో వాడినపుడు 'వంద' అనేది వాక్యంలోని క్రియా పదంతో అన్వయం పొందుతుంది. కాబట్టి 'వంద' ప్రధాన పదం అవుతుంది. ఆ 'వంద' ఎటువంటిది అనేది సూచించే 'మూడుయైన' అనేది 'వంద' అనే పదానికి విశేషణం అవుతుంది. "అంకెలను తెలియజేసే శబ్దాలు విశేషణాలై పూర్వపదాలుగా గల తత్పురుష సమాసం ద్విగు సమాసం" అనేది ఈ సమాసం యొక్క సూత్రం. విశేషణం ఐన 'మూడుయైన'లోని మూడు సంఖ్య వల్ల ఈ సమాసం ద్విగు సమాసమవుతుంది. (ఉత్తర పదంలో వున్న 'వంద' అనే సంఖ్య వల్ల కాదు అని గమనించాలి.)

'ముక్కంటి' అనే పదం 'ముప్వంద'తో సారూప్యం కలిగివున్నట్లు కనబడుతుంది. కాని నిజానికి సారూప్యత లేదు. 'మూడు కన్నులు కలవాడు' యొక్క సమాస రూపం '**ముక్కంటి**' అవుతుంది. ఇక్కడ 'విశేషణము + ప్రధాన పదం' రూపంలో దీనిని విడదీయడానికి వీలు పడదు. ముక్కంటి' లో ఏ పదమూ క్రియతో అన్వయం పొందదు కాబట్టి అది అన్యపద ప్రధానమైనది. కాబట్టి అది బహువ్రీహి సమాసం అవుతుంది.

ముప్పేటలో మూడు పేటలుంటే ఉన్నాయేమో కాని ముప్పేట కాయ అంటే మూడు పాళ్ళు ముదిరి ఇంకా ఒక పాలు లేతగా ఉన్న కొబ్బరి కాయ. ముక్కంటి అంటే మూడు కన్నులు కలవాడు శివుడు; కలది కొబ్బరికాయ.

విశాఖపట్నం జిల్లాలో ముచ్చిలక అనే మాటని ముప్పాతిక అనే అర్థంలో వాడడం నేను చూసేను. కాని నిఘంటువులో ముచ్చిలక అంటే భూస్వామి, కౌలుదారుల మధ్య ఖరారునామా అనే అర్థం ఒక్కటే ఉంది. ఇదే నిజమైన పక్షంలో ముచ్చిలకకీ, మూడుకీ మధ్యనున్న బాదరాయణ సంబంధమేమిటో?

ముమ్మారు అన్నా ముమ్మిడి అన్నా మూడు సార్లు అని అర్థం కదా, మరి ముమ్మిడివరం అంటే మూడు సార్లు వరం అని అర్థమా? దేవుడి దగ్గర మూడు వరాలు పుచ్చుకుందికేనేమో ముమ్మిడివరంలో బాలయోగి వెలిసేడు.

ముప్పది అంటే మూడు పదులు, వెరసి ముప్ఫయ్. అలాగే ముయ్యేడు అంటే మూడు ఏళ్ళు వెరసి ఇరవై ఒకటి. మున్నూరు 300 అయినట్లే మూడు మూళ్ళు తొమ్మిది కాస్తా ముమ్మూడు అవుతుందన్నది ముమ్మాటికీ నిజం.

మనిషిని పోలిన మనిషి కనిపిస్తే “ముమ్మూర్తులా మీ పోలికే!” అంటాం.

మార్గశిర శుద్ధ ఏకాదశి నాడు తిరుపతిలో స్వామి పుష్కరిణిలో మూడుకోట్ల తీర్థములు వస్తున్నవనే ఐతిహ్యం కారణంగా ఆ రోజుని ముక్కోటి ఏకాదశి అంటారు.

ఈ పైన చెప్పిన ఉదాహరణలన్నిటినీ వ్యాకరణంలో ఒక్క సూత్రంతో టూకీగా చెప్పెయ్యొచ్చు. “సమానాధికరణంబగు ఉత్తర పదంబు పరంబగునప్పుడు మూడు శబ్దమున డువర్ణంబునకు లోపంబును, మీది హల్లునకు ద్విత్వంబును అగు”. కనుక మూడు + లోకములు = ముల్లోకములు. ఇదే విధంగా ముప్పాతిక, ముప్విధం, ముక్కాలి పీట, ముత్తాత, ముజ్జగము, మొదలగునవి.

వ్యాకరణంలో ముఖ్యమైన సంధి త్రిక సంధి. ఈ సందర్భంలో అ, ఇ, ఎ అనే అక్షరాలని త్రికం అంటారు.

ముయ్యంచు అంటే త్రిభుజం అని ఎంతమందికి తెలుసు? ఈ త్రిభుజాన్ని త్రికోణి అని కూడ అంటారు.

"త్రి"తో మొదలయే సంస్కృతం మాటలు తెలుగులో కొల్లలు. త్రిమూర్తులు, త్రిలోకములు మనకు తెలిసున్నవే. ఆయుర్వేదంలో సొంఠి, పిప్పలి, మిరియాలని త్రికటుకాలనిన్నీ; కరక, తాడి, ఉసిరికలని త్రిఫలాలనిన్నీ; వాత, పిత్త, శ్లేష్మాలని త్రిదోషాలనిన్నీ అంటారు. వ్యాకరణంలో మాత్రం త్రిదోషాలంటే పద, వాక్య, అర్థ దోషాలు.

"ట్రిగొనామెట్రీ" అన్న మాటని త్రి, గుణ, మాత్ర అని మూడు మాటలుగా విడగొట్టి "మూడు గుణాలని (సైను, కోసైను, టేంజెంటు) కొలిచే శాస్త్రం" అని అన్వయం చెప్పొచ్చు. దీనిని త్రికోణమితి అని కూడా అనవచ్చు.

త్రిశూలం త్రినేత్రుడి ఆయుధాలలో ఒకటి. త్రిదండం అనేది మనోదండం, వాగ్దండం, కర్మదండం అనబడే మూడు వెదురు బద్దలతో కట్టిన దండం. శైవులు నుదుటి మీద అడ్డుగా పెట్టుకునే విభూతి పెండికట్లని త్రిపుండ్రం అంటే వైష్ణవులు నిలువుగా పెట్టుకునే బొట్టుని ఊర్ధ్వపుండ్రం అంటారు.

బ్రహ్మపదార్థము సగుణబ్రహ్మము, నిర్గుణబ్రహ్మము అని రెండు రకాలే అయినా సగుణబ్రహ్మము మాత్రం త్రికాలాలలోనూ త్రిగుణాత్మకం (సత్వ, రజో, తమో గుణాలు) అని త్రిమతాచార్యులైన శంకర, రామానుజ, మధ్వాచార్యులు ఏకీభవించేరు.

మనస్సులో అనుకున్నది ఒకటి, నోటితో చెప్పేది మరొకటి, చేత్తో చేసేది ఇంకొకటి అయితే ఆ పనిలో త్రికరణశుద్ధి లేదు.

"త్రి" అన్న అక్షరం మాటకి మొదట వచ్చినట్లే మూడుని సూచించడానికి "త్రయం" అన్న తోక సర్వసాధారణంగా మాటకి చివర వస్తుంది - త్రిమూర్తులలో ఒకడైన శివుడిని "త్ర్యంబకుడు" అన్నప్పుడు తప్ప. భారతాన్ని తెలిగించిన నన్నయ, తిక్కన, ఎర్రనలు కవిత్రయం.

అవస్థా త్రయంలో ఒంటి మీద తెలివి ఉన్న పరిస్థితిని జాగ్రదావస్థ అనిన్నీ, తెలివి తప్పిన తర్వాత నిద్రావస్థ అనిన్నీ, కలలు కనే సమయాన్ని స్వప్నావస్థ అనిన్నీ లేదా సుషుప్తావస్థ అనిన్నీ అంటారు. ఈ సుషుప్తావస్థ గురించి మనకి అనాది నుండి తెలుసుకానీ, ఈ దృగ్విషయం ("ఫినామినన్") పాశ్చాత్యులకి ఈ మధ్యనే అవగాహన అయింది. దీనినే వీళ్ళు "రెం స్లీప్" అంటారు.

సులభంగా అర్థం అయే కవిత్వం ద్రాక్షాపాకం, కొంచెం కష్టపడితే కాని అర్థం కాకపోతే అది కదళీపాకం, బొత్తిగా కొరుకుడు పడనిది నారికేళపాకం. ఈ మూడింటిని గుమ్మగుచ్చి పాకత్రయం అంటారు. ఇలాగే ఈషణత్రయం అని ఒకటుంది. నారేషణ అంటే ఆడదాని యందు ఆశ. పుత్రేషణ అంటే కొడుకు పుట్టాలనే కోరిక, ధనేషణ అంటే డబ్బు కోసం తాపత్రయం. "తాపత్రయం" అన్న మాటకి అసలు అర్థం ఆధ్యాత్మికం, ఆధిభౌతికం, ఆధిదైవికం అయినప్పటికీ ఆ విషయాన్ని విస్మరించి మనకి తోచిన విధంగా వాడేయడానికి ఊరికే తాపత్రయ పడిపోతూ ఉంటాం.

మంత్రత్రయం (అష్టాక్షరి, ద్వయం, చరమశ్లోకం) లోని ద్వయం గురించి గతంలో ముచ్చటించేను. ఇక, "ఓం నమో నారాయణాయ" అన్నది అష్టాక్షరి. చరమశ్లోకం గురించి ఆఖర్న చెబుతాను.

కాళహస్తి, ద్రాక్షారామం, శ్రీశైలం ఉన్న త్రిలింగ దేశమే తెలుగు దేశం అని అంటారు కానీ రాజమండ్రి దగ్గర ఉన్న కోటిలింగాలని లెక్కపెట్టడం మరిచిపోయారా, ఏమిటి?

"త్రయం"కి ఇంగ్లీషులో సమానార్థకం "ట్రిపుల్" లేదా "ట్రయొ".

ఇంగ్లీషులోని "ట్రై", "ట్రి"లు సంస్కృతం లోని "త్రి" జ్ఞాతులు కనుక "ట్రై ఏంగిల్" అన్న మాటకి దేశభాషలలో సరి అయిన మాట "త్రికోణం" లేదా "త్రికోణి."

ఇదే బాణీలో ముయ్యాకు అంటే మూడాకుల దళం అని అర్థం. ఏ మూడాకుల దళాన్నైనా ఇంగ్లీషులో "ట్రైఫోలియేట్" అంటారు. "ట్రైడెంట్" అంటే "మూడు దంతాలు ఉన్నది" అనే అర్థం స్ఫురించినా ఇంగ్లీషులోనూ తెలుగులోనూ ఇది మూడు పళ్ళు ఉన్న త్రిశూలం. కనుక ఇక్కడ "పన్ను" నోటిలోనిది కాదు; శూలం లోని ములుకు.

క్లోరోఫారం యొక్క రసాయన నామం అయిన “ట్రైక్లోరో మెతేన్” న్ని “త్రిహరిత పాడేను” అని నేను తెలిగించేను. దీని వ్యుత్పత్తి కావలసిన వారు నేను రాసిన “నిత్యజీవితంలో రసాయన శాస్త్రం” పుస్తకం చదవండి.

త్రిశంకు స్వర్గం, త్రిశంకు చక్కెర మొదలైన మాటలలోని “త్రి” కీ, మూడుకీ ఏమీ సంబంధం లేదని మనవి చేసుకుంటున్నాను. ఇంతకీ త్రిశంకు చక్కెర ఏమిటా అని ఆరాట పడకండి. అది “ఇన్వర్ట్ సుగర్” అన్న మాటకి నా తెలుగుసేత. దీని వృత్తాంతం కూడ “నిత్యజీవితంలో ....” లో ఉంది.

కేంబ్రిడ్జి విశ్వవిద్యాలయంలో జరిగే పరీక్షలలో పరీక్షని పర్యవేక్షించే వ్యక్తి (”వాచరు”) ముక్కాలిపీట మీద కూర్చునేవాడుట. అందుకనే ఈ పరీక్షలని “ట్రైపోస్” అనేవారు.

పాశ్చాత్త్యుల ప్రస్తావన ఎలాగూ వచ్చింది కనుక ఒక చిన్న పిట్టకథ చెబుతాను. రాజకీయాలలో మనం మన దేశాన్ని కుల వర్గాలుగా విడగొట్టినట్లే పూర్వం రోం సామ్రాజ్యాన్ని రోమను, సెబీను, ఆల్బను అని మూడు కుల వర్గాలుగా విడగొట్టేరు. లేటిన్ లో “ట్రైఅస్” అంటే మూడో వంతు కనుక ఈ కుల వర్గాలని వారు “ట్రైబ్” అన్నారు. రాజాస్థానానికి వచ్చే రాబడిలో మూడో వంతు ప్రతి “ట్రైబ్” నుండి వస్తోంది కనుక ఆయా కుల వర్గాలు కట్టే పన్నుని “ట్రిబ్యూట్” అన్నారు. “కంట్రిబ్యూషన్” అన్న మాట ఇందులోంచి వచ్చినదే. ఉపనదిని “ట్రిబ్యూటరీ” అనడానికి కూడ కారణం ఇదే - నదిలోని నీటిని “కంట్రిబ్యూట్” చేస్తున్నాది కనుక!

రెండు పేటల దారంతో నేసిన బట్టని “ట్వీల్” అన్నట్లే, మూడు పేటల దారంతో నేసిన బట్ట “డ్రిల్” బట్ట. ముప్పిరి అంటే మూడు పేటలు కనుక “డ్రిల్లు” బట్టని ముప్పిరి బట్ట అనొచ్చు.

“త్రిమితీయ” అన్న ప్రత్యయాన్ని “త్రీ డిమెన్షనల్” అన్న అర్థంలో వాడుతున్నారు కొందరు.

ఒక సంఖ్యని 3 చేత భాగించగలమా లేమా అని సంశయం వస్తే ఆ సంఖ్యలోని అంకెలని అన్నింటిని కలిపి ఆ మొత్తాన్ని మూడు చేత భాగించి చూడండి. ఈ మొత్తాన్ని 3 చేత భాగించ గలిగితే ఆ సంఖ్యనీ భాగించగలం. ఉదాహరణకి 531 లోని అంకెల మొత్తం 5 + 3 + 1 = 9. ఈ 9 ని 3 చేత భాగించగలం కనుక 531 నీ భాగించగలం.

వృత్తలేఖిని, కొలబద్ద సహాయంతో ఒక గీతని కాని, కోణాన్ని కాని సమద్విఖండన చేయవచ్చని రేఖాగణితంలో దిట్టలయిన గ్రీకులు ఎప్పుడో కనుక్కున్నారు కానీ ఒక కోణాన్ని "ట్రైసెక్ట్" (సమత్రిఖండన) చెయ్యడం ఎలాగో వాళ్ళకి తెలియలేదు. ఈ పని చెయ్యడం అసంభవం అన్న విషయం మనకి ఇప్పటి కాలంలోనే అర్థం అయింది!

భూగర్భశాస్త్రంలో "మూడవ, తృతీయ" అన్న అర్థం రావలసినప్పుడల్లా "టెర్షియరీ, ట్రయాసిక్" అనే పూర్వప్రత్యయాలు వాడతారు.

"ట"మాషా ఏమిటంటే ఇంగ్లీషులో ట కార త కారాలకి ఒకే ఒక అక్షరం ఉన్నా భాష ఉచ్చారణలో ట కార త కారాలతో మొదలయే "మూడు" మాటలు చాల ఉన్నాయి. కాని తెలుగులో ట కార త కారాలకి విడివిడి అక్షరాలు ఉన్నా ట కారంతో "మూడు" మాటలు తెలుగులో లేవు.

రెండు రోడ్ల కూడలిని కూడలి కిందే లెక్కించరు, ఎందుకంటే రోడ్డు మీద ఎక్కడ నిలబడ్డా, ముందున్న రోడ్డు, వెనకున్న రోడ్డు కలిపి రెండు రోడ్ల కింద లెక్క లోకి వస్తుంది. కానీ మూడు రోడ్ల కూడలిని లేటిన్ లో "ట్రివియం" అంటారు. ఈ రకం కూడలిలో కూర్చుని ప్రజలు పనికిమాలిన కబుర్లు చెప్పుకుంటూ కాలక్షేపం చేసేవారుట. మన దేశంలో ఇప్పటికీ ఇలా చొల్లు కబుర్లు చెప్పుకుంటూ కానాల మీద కూర్చుని కాలక్షేపం చేసేవారు కనిపిస్తూనే ఉంటారు. ఇటువంటి "ట్రివియల్" కబుర్లు చెప్పి మీ కాలం వృధా చెయ్యడం నాకు ఇష్టం లేదు కనుక, ప్రస్తుతానికి ఈ బాతాకానీ ఆపుతాను.

4. అంకెలు, సంఖ్యలు: నాలుగు

రెండు పాదాలున్న తెలుగు పద్యాన్ని ద్విపద అన్నట్లే నాలుగు పాదాలున్న పద్యాన్ని చతుష్పద అనో చతుష్పాది అనో అనొచ్చు. చతుష్పాది అంటే జంతువనే అర్థమే సర్వసాధారణంగా నలుగురికీ స్పురిస్తుంది కనుక ఆ మాట ఇక్కడ నప్పదు. ఇక్కడ 'నలుగురికీ' అన్న ప్రయోగం, 'నలుగురితో చెప్పి మరీ చెయ్యి,' 'నాలుగు మూలలా వెతుకు,' 'నాలుగు చివాట్లు వేసి రా," మొదలైన ప్రయోగాలు అజహర్లక్షణం అనే అలంకారానికి ఉదాహరణలు. ఇక్కడ 'నలుగురూ' అంటే 'పది మంది' – లేదా చాల మంది – అని అర్థం. పులి మీద పుట్రలా ఒక అజహర్లక్షణాన్ని వివరించటానికి మరొక అజహర్లక్షణం వాడవలసి వచ్చింది – గమనించేరో, లేదో!

జపానీ భాషలో నాలుగుకి ఒక ప్రత్యేకత ఉంది. జపాను భాషలో 'చి' అంటే 'నాలుగు' అని ఒక అర్థం, 'రక్తం' అని మరొక అర్థం. అందుకని నాలుగు వారికి అశుభం. మనం ఏడుని ఆరున్నొక్కటి అన్నట్లే వారు నాలుగుని మూడున్నొక్కటి అంటారో అనరో కనుక్కోవాలి.

చింతపిక్కలాటలో నాలుగుని 'పుంజీ' అంటారు. ఇది 'పుంజము' కి భ్రష్ట రూపం. పుంజం అంటే పోగు; చెవి పోగు కాదు, ఇక్కడ 'పోగు' అంటే రాశి. నక్షత్రాల పోగుని కూడ రాశి అనే అంటాం.

నా చిన్నతనంలో నాలుగు కానులని 'అణా' అనే వాళ్ళం. ఇప్పుడు అణాలు చెల్లక పోవటమే కాకుండా 'పదహారణాల ఆంధ్రుడు' అన్న జాతీయం కూడ చెలామణీలో లేకుండా పోయింది.

సంస్కృతంలో 'చౌ' అంటే నాలుగు. నాలుగు ముత్యాలతో చేసిన జూకాలని చౌకట్లు అంటారు. పలకలు, పటాలు, కిటికీలు, మొదలైన వాటికి నాలుగు పక్కలా ఉండే బందు ('ఫ్రేము') ని కూడా చౌకట్టు అనే అంటారు.

గుర్రం నాలుగు కాళ్ళనీ పైకి ఎత్తి అవరోధాన్ని దాటే విధానమే చౌకళించటం.

నాలుగు స్థంబాలతో కట్టి అన్ని వైపులా తెరచి ఉన్న కట్టడం చౌకం. ఇదే చౌకు లేదా చౌకీ అయింది. మరీ 'బూతులు' వాడటం ఇష్టం లేని వాళ్ళు ఇంగ్లీషులో 'బూత్' ని 'చౌకు' అని కానీ చౌకీ అని కానీ

తెలిగించవచ్చు. అప్పుడు 'టోల్ బూత్' ఆసీల చౌకు అవుతుంది. మా ఊళ్ళో అయితే "ఆసీల పాక" అనేవాళ్ళం!

నాలుగు రకాల తినుభండారాలని కలపగా వచ్చిన 'మిక్చర్' ని చౌచౌ అని కూడ అంటాం.

చవితి అనే మాట చౌతి కి రూపాంతరం. చౌషష్టి 64, చౌసీతి 84.

చౌదరి లో 'చౌ' అంటే అర్థం ఏమిటో?

నాలుగు దంతాలు ఉన్న ఇంద్రుడి ఏనుగు చౌదంతి. దీనినే చతుర్దంతి అని కూడ అంటారు. 'చౌ' కంటె 'చతుర్' బాగా వాడుకలో ఉంది.

చతుర్ముఖుడు చతుర్వేదములకి కర్త అని నలుగురూ నమ్మే విషయమే.

ధర్మ, అర్థ, కామ, మోక్షాలు చతుర్విధ పురుషార్థాలు. సాలోక్య, సామీప్య, సారూప్య, సాయుజ్యాలు చతుర్విధ ముక్తులు.

వేదాలు నాలుగు: ఋగ్వేదం, యజుర్వేదం, సామవేదం, అదర్వణవేదం.

దిక్కులు నాలుగు: తూర్పు, దక్షిణం, పడమర, ఉత్తరం. మూలలు నాలుగు: ఆగ్నేయం, నైరుతి, వాయవ్యం, ఈశాన్యం. వీటిలో ఏ మూల ఏయే దిక్కుల మధ్య వస్తుందో చెప్పడానికి తేలికైన మార్గం లేదు; కంఠస్థం చేయవలసిందే!

సనాతన ధర్మంలో నాలుగు చాల చోట్ల కనిపిస్తుంది. 'చాతుర్వర్ణ్యం మయా సృష్టం' అన్నాడు గీతాచార్యుడు. చతురాశ్రమములు అంటే బ్రహ్మచర్యం, గార్హస్త్యం, వానప్రస్తం, సన్యాసం. ఈ నాలుగు వర్ణాలనీ, నాలుగు ఆశ్రమాలనీ కలిపి వర్ణాశ్రమ ధర్మం అన్నారు.

మళ్ళా ఈ నాలుగు ఆశ్రమాలు ఒకొక్కటి నాలుగేసి రకాలు. ఉదాహరణకి బ్రహ్మచారులలో నాలుగు రకాలు: గాయత్రీ, ప్రాజాపత్య, వైదిక, నైష్ఠిక. ఇలాగే సన్యాసులలో నాలుగు రకాలు: కుటీచకుడు, బహూదకుడు, హంసకుడు, పరమహంస.

'చతుర్వర్ణ' సిద్ధాంతం మీద ఉత్తర-అధునాతనులు (post modernists) ఈ మధ్య దండెత్తి దుమ్మెత్తి పోస్తూ ఉంటే చూస్తూ, చూస్తూ ఊరుకోలేక నేనొక వ్యాఖ్యానం లేవనెత్తేను. దాని సారాంశం ఇది. 'చాతుర్వర్ణ్యం మయా సృష్టం' అంటే "నాలుగు రంగులనీ నేనే సృష్టించేను" అని వాచ్యార్థం. ఇక్కడ నాలుగుని గీతాచార్యుడు అజహర్లక్షణంగా వాడేడనుకుందాం. అంటే ఏమిటి? నాలుగు అంటే ఉత్త 'నాలుగు' కాదు, ఎన్నో అని కాని, 'రకరకాల' అని కాని భగవానుడు ఉద్దేసించి ఉండవచ్చు కదా. భగవానుడు ఎన్నో 'రంగులు' సృష్టించేడా? 'రంగు' అనే మాటకి స్వభావం అనే అర్థం తెలుగులో వాడుకలో ఉంది. "వాడి అసలు రంగు బయట పడిందిరా" అన్న ప్రయోగం చూడండి. కనుక "చాతుర్వర్ణ్యం మయా సృష్టం" అంటే "రకరకాల స్వభావాలు గల మనుష్యులని నేను సృష్టించేను" అన్న అర్థం వస్తోంది కదా. మనుష్యుల స్వభావాలు రకరకాలుగా ఉంటాయి, ఎవ్వరి స్వభావానికి అనుకూలంగా వారు ప్రవర్తించాలి" అని భగవానుడు చెబుతున్నాడన్నమాట.

నేను ఈ రకంగా గీతా వాక్యాన్ని వ్యాఖ్యానిస్తే, "అజహర్లక్షణం వాడిన వాడు, 'చతుర్' అనే మాటనే ఎందుకు ఎన్నుకున్నాడు, 'దశవర్ణం మయా సృష్టం' అనవచ్చు కదా అని ఆక్షేపించేరు. ఇక్కడ నాలుగునే ఎన్నుకోటానికి ఒక 'సైంటిఫిక్' కారణం ఉంది. మన స్వభావాలు అన్నీ మన డి. ఎన్. ఎ. లో రాసి ఉన్నాయని ఈ రోజులలో అందరికీ తెలిసున్న విషయమే. ఈ డి. ఎన్. ఎ. లో నాలుగే నాలుగు 'న్యూక్లియోటైడు' లు ఉన్నాయి – పది లేవు. వీటిని చతుర్ వర్ణాలుగా ఊహించుకుంటే వర్ణాలు నాలుగే అయినప్పటికీ రకరకాల మనుష్యులు ఎలా పుడతారో అవగాహన అవుతుంది. అలాగే సృష్టి కార్యం వెనక నాలుగు ప్రాథమిక బలాలు (గురుత్వాకర్షక, విద్యుదయస్కాంత, త్రాణిక, నిస్త్రాణిక బలాలు) ఉన్నాయని అంటున్నారు కదా!

చతుష్టయం అంటే నాలుగు శాల్తీలు. అవస్థా చతుష్టయం లో బాల్యం, కౌమారం, యవ్వనం, వార్ధక్యం ఉన్నాయి. దుర్యోధనుడు, దుశ్శాసనుడు, కర్ణుడు, శకుని – ఈ నలుగురూ దుష్టచతుష్టయం అని ఆబాలగోపాలానికి తెలుసు. చతుష్టయం అన్న మాటని 'క్వాడ్రుపుల్' అని కాని, 'క్వార్టెట్' అని కాని ఆంగ్లీకరించవచ్చు.

మహాభారతం గురించి ప్రస్తావించిన తర్వాత రామాయణానికీ, నాలుగుకీ ఉన్న బంధాన్ని కొంచెం విచారిద్దాం. బ్రహ్మ నాలుగు చేతులలో ముందున్న రెండు చేతులూ రామ లక్ష్మణులనీ, వెనక ఉన్న రెండూ భరత శతృఘ్నులనీ సూచిస్తాయని ఒక పురాణంలో ఉంది.

నాలుగు ముఖాలూ, నాలుగు చేతులు ఉన్న బ్రహ్మ నాలుగు రేకల పద్మం పై ఆసీనుడై ఉంటాడు కదా. నాలుగు ముఖాల నుండీ నాలుగు వేదాలు పుట్టేయి. బ్రహ్మ సృష్టిలో నాలుగు యుగాలు, నాలుగు వర్ణాలూ, నాలుగు పురుషార్థాలు.

మానసిక శాస్త్రంలో రెండు జోడీల అనుభవాలని 'క్వాటర్నిటీ' అనాలని కారల్ యంగ్ సూత్రీకరించేరు. 'ట్రినిటీ' ని త్రిమూర్తి అన్నట్లే ఈ 'క్వాటర్నిటీ' ని చతుర్మూర్తి అనొచ్చు. యంగ్ భారత దేశాన్ని సందర్శించిన తదుపరి ఆయన మన చతుర్విధ పురుషార్థాల వల్ల ప్రభావితులయ్యారని వినికిడి. ఈ చతుర్మూర్తిత్వం జీవితంలో అడుగడుగునా కనిపిస్తుందని అంటారు యంగ్. పూర్ణత్వానికి నాలుగు పాదాలు ఉండాలి అంటారీయన. *"The quaternity is the sine qua non of divine birth and consequently of the inner life of the trinity." (Carl Jung, CW 12, para 125)."*

ధర్మం నాలుగు పాదాల మీద నడిచింది కనుక కృతయుగంలో పరిపూర్ణత్వం ఉంది.

భోజనాలకి వాడే 'ఫోర్కు' లలో మూడు రకాలు ఉన్నాయి. కావలిస్తే వాటిని, ద్విశూలం, త్రిశూలం, చతుశ్శూలం అనవచ్చు.

చదరానికి చౌపదం కంటె చతుర్భుజం, చతురస్రం అన్న మాటలే ఎక్కువ వాడుకలో కనిపిస్తాయి. చతుర్భుజం అంటే నాలుగు భుజాలున్న ఏ రేఖాగణితపు బొమ్మ అయినా అవచ్చు. కాని చతురస్రం అనగానే ఆ భుజాల నిడివి సమానం అనిన్నీ, ఆ భుజాల మధ్య ఉండే కోణం లంబ కోణమనీ గ్రహించునది.

'స్క్వేర్' అంటే చదరం. ఇది లేటిన్ లోని 'ఎక్స్ క్వాడ్రెన్' నుండి వచ్చింది. ఇంగ్లీషు లోని క్వాడ్రిలేటరల్,' 'క్వాడ్రేంగిల్' అన్న రెండూ వాడుకలోనే ఉన్నప్పటికీ, తెలుగులోకి వచ్చేసరికి 'చతుర్భుజం' ఉన్నంత వాడుకలో 'చతుర్కోణి' లేదు. ఈ 'క్వాడ్రేంగిల్' కి ముద్దుగా పెట్టిన 'క్వాడ్' అన్న పేరు బాగా ప్రాచుర్యంలో

ఉంది – అమెరికాలో. విశ్వవిద్యాలయాలలోను, కళాశాలలోను, నాలుగు భవనాల మధ్య ఉండే భాగాన్ని 'క్వాడ్' అని పిలుస్తారు.

ఈ 'క్వాడ్' రేఖాగణితం నుండి బీజగణితం లోకి వచ్చేసరికి కొంచెం తిరకాసు తర్కానికి లోనయి, 'క్వాడ్రేటిక్' గా మారింది. 'క్వాడ్' అంటే 'నాలుగు' అయినప్పటికీ, 'క్వాడ్రేటిక్' రెండుని సూచిస్తుంది. ముఖ్యంగా ఒక చలరాసి ఘాతం రెండు అయితే 'క్వాడ్రేటిక్' అన్న విశేషణాన్ని వాడతారు. 'క్వాడ్' అనే మాటని ఇలా రెండర్థాలతో వాడటం వల్ల కొంత గాసటబీసటకి ఆస్కారం ఉంది. కాని తార్కింగా ఆలోచిస్తే ఈ పరిస్థితికి ఒక కారణం ఉంది. ఒక చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం కావాలంటే దాని భుజం కొలతని ఘాతించాలి. ఘాతించటం అంటే భుజం కొలతని రెండు సార్లు వేసి హెచ్చవెయ్యటం. ఇదీ రెండుకీ, చతురస్రానికి మధ్య ఉన్న బాదరాయణ సంబంధం. కనుక బీజగణితంలో ఒక చలన రాసి ఘాతం రెండు అయితే దానిని వర్ణించటానికి 'క్వాడ్రేటిక్' అన్న విశేషణాన్నీ, నాలుగు అయితే 'బైక్వాడ్రేటిక్' లేదా 'క్వార్టిక్' అన్న విశేషణాన్నీ వాడతారు.

మూడు కాళ్ళ పీటని ముక్కాలి పీట అన్నట్లే, గ్రీకు భాషలో నాలుగు కాళ్ళ మంచాన్ని 'ట్రపీజ్' అంటారు. మన నులక మంచం ఒక ట్రపీజ్. సర్కస్ లో గెంతటానికి మంచాన్ని పోలిన ట్రపీజ్ ని వాడతారు. గ్రీకు వారికి ట్రపీజ్ ఎటువంటిదో హిందీ వారికి 'చార్‌పోయ్' అటువంటిది. హిందీలో 'చార్‌పోయ్' అన్నా, లేటిన్ లో 'క్వాడ్రుపెడ్' అన్నా, గ్రీకులో 'టెట్రాపాడ్' అన్నా ఒకటే. ఇంగ్లీషులో 'క్వాడ్రుపెడ్' అంటే నాలుగు పాదాలు ఉన్నది – జంతువు. తెలుగులో నాలుగు పాదాలు ఉన్నది మంచం కాదు, జంతువు కాదు; పద్యం అని మొదట్లోనే చెప్పేను.

నాలుగు నాలుగులతో ఒక గమ్మత్తు అయిన ఆట ఆడ వచ్చు. దీనిని టుకీగా చెబుతాను. లెక్కలలో ప్రవేశం ఉన్నవాళ్ళు దీనితో కుస్తీ పట్టి రామానుజన్ లా "అంకెలు నా సంగడికాళ్ళు" అని కాలరెగరేసి చెప్పుకోవచ్చు.

నాలుగే నాలుగు 4-లు తీసుకుని, మనం సామాన్యంగా వాడే గణన కార్యాలని (అంటే కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగారం, దశాంశ బిందువు, వర్గ మూలం, మొదలైన mathematical operations) మాత్రమే వాడి, సున్న నుండి ఎంత పెద్ద సంఖ్య వరకు రాయగలం? మీకు సాయం చెయ్యటానికి, నేను మొదలు పెడతాను. ఉదాహరణకి:

0 = 44 – 44

1 = 44/44

2 = (4/4) + (4/4)

3 = (4 + 4 + 4)/4

5 = (4*4 + 4)/4

…

ఇక్కడ * గుర్తు గుణకారానికి, / గుర్తు భాగారానికి వాడేను. ఒక తెల్ల కాగితం తీసుకుని, ఈ వరసని ఎంత దూరం వెళ్ళగలరో చూడండి. కొంచెం లెక్కలు వచ్చిన వాళ్ళు అవసరమైనప్పుడు దశాంశ బిందువు, వర్గమూలం, 'ఫేక్టోరియల్' మొదలైనవి కూడ వాడొచ్చు. ఉదాహరణకి

95 = (4*4!) – (4/4).

ఈ ఆటని ఆడుతూ 0 నుండి 40,000 పైబడి సంఖ్యలు వచ్చే వరకు చేసిన వారున్నారు. ఈ ఆటని నాలుగు నాలుగుల తోటే ఆడాలని నిబంధన ఏదీ లేదు. ఎన్నో మార్పులు, చేర్పులు చేసి ఆడొచ్చు.

నలుగురితో పాటు నారాయణా అనుకో మన్నారు కదా అని నాకు తెలిసిన 'నాలుగు' విషయాలు నలుగురికీ నాలుగు పేజీలలో చెప్పేసేను.

5. అంకెలు, సంఖ్యలు: అయిదు

“అయిదు” ఐదుకి రూపాంతరం.

మన చేతికి ఐదు వేళ్ళు ఉండబట్టి ఐదుకీ చేతికీ ఒక విధమైన సంబంధం ఉంది.

ఐదు చేతుల మల్లి మొగ్గలు కొంటే ఐదైదులు ఇరవై అయిదు, పైన ఒక చెయ్యి కొసరుతో వెరసి ముప్ఫై మొగ్గలు ఇచ్చేవారు.

ఐదు పది చెయ్యడం అంటే రెండు చేతులూ జోడించి నమస్కరించడం. “ఒక ఐదిచ్చుకో” [గిమ్మీ ఎ ఫైవ్] అన్నప్పుడు “హై ఫైవ్” అనే కొత్త పద్ధతి కరచాలనానికి ఆహ్వానం అనే అర్థం.

ముత్త + అయిదువ = ముత్తయిదువ కాబట్టి అయిదోతనం ఉన్న ముదుసలి అన్న అర్థం స్ఫురిస్తూన్నప్పటికీ ముత్తయిదువ అన్న మాటని భర్త బతికివున్న ఏ స్త్రీ ఎడలైనా వాడతారు. కాని ఈ మాటని పెద్దవారి యెడల ఉపయోగించినంతగా చిన్న వారిని ఉద్దేశించి వాడరు.

అయిదోతనం అంటే అయిదు వన్నెలు కలిగి ఉండడం. ఇక్కడ “వన్నెలు” అంటే సుమంగళి యొక్క అలంకారాలు: మంగళసూత్రం, పసుపు, కుంకుమ, గాజులు, చెవ్వాకు. చెవ్వాకు అంటే చెవికి పెట్టుకునే తాటాకుతో చేసిన ఆభరణం. "చెవ్వాకు పోయినమ్మకు దుఃఖమూ లేదు, దొరికినమ్మకు సంతోషమూ లేదు” అంటారు.

ఏను అన్న మాట ఐదుకి రూపాంతరం. దీని లోంచే “ఏదుము” వచ్చి ఉంటుంది. ధాన్యాన్ని కొలిచేటప్పుడు వాడే కొలమానంలో “ఏదుము” అనే మాట మీరు వినుంటే మీ వయస్సు కనీసం ఐదు పదులు దాటి ఉంటుందని నేను ఊహించగలను. ఏదుము = ఐదు + తూము. ఐదు తూములు ఒక ఏదుము. ఇదే విధంగా బరువులు తూచేటప్పుడు విశాఖపట్నం జిల్లాలో వాడే ఏబలం = ఐదు + పలము. ఐదు పలములు ఒక ఏబలం. ఇదే విధంగా పదలం అంటే పది పలములు.

అయిదు తర్వాత ఎక్కువగా తెలుగులో కనిపించేది, వినిపించేది “పంచ” శబ్దం. “పంచ”లో దంత్య చకారం ఉన్న మాటలన్నీ శుద్ధ తెలుగు మాటలు. కానివి సంస్కృతం నుండి దిగుమతి అయినవి.

తెలుగులో దంత్య చకారంతో పలికే పంచ [దీనిని “పంచదార”లో పంచ లా ఉచ్చరించాలి] అంటే చూరు. తెలుగులో "పంచ" చూరు అయితే సంస్కృతంలో “పంచ” అంటే అయిదు. ఈ రెండర్థాలతోటీ దోబూచులాడుతూ ఉన్న ఈ వేమన పద్యం చూడండి.

పంచశత్రుల దెగి పంచబాణుని గెల్చి
పంచవర్ణములను పఠన చేసి
పంచముఖముగల భవసంజ్ఞ గలవాని
పంచ చేరువాడు పరగ వేమ.

ఆకుపచ్చ, ఎరుపు, తెలుపు, నలుపు, పసుపు రంగులని పంచరంగులు అంటారు కాని ఆధునిక శాస్త్రం ప్రకారం తెలుపు, నలుపులని విడివిడిగా రంగులలో లెక్కపెట్ట కూడదు. అంతే కాదు. “తెలుపు”, “నలుపు” అన్న మాటల రెండింటి మధ్య వ్యత్యాసం వాటి ద్యుతిలో ఉన్న తేడా మాత్రమే. అన్ని రంగులు కలిసినప్పుడే తెలుపు వస్తుందని చిన్నప్పుడు సైన్స్‌లో చదువుకున్నాం. నలుపు కూడ అంతే అన్ని రంగుల కలయికే. తెలుపు వస్తువులు తెల్లగా ఉండడానికి కారణం వాటి మీద పడ్డ కాంతి అంతా పరావర్తనం చెంది మన కంటికి చేరుకోవడమే. నల్ల వస్తువుల మీద పడ్డ కాంతి అస్సలు పరావర్తనం చెందదు. అటువంటి వస్తువుని సైన్సులో “బ్లేక్ బోడీ” అంటారు.

పంచకళ్యాణి గుర్రం అంటే అయిదు రంగుల గుర్రం కానే కాదు. ఏ రంగు గుర్రమైనా సరే శరీరమంతా ఒకే రంగు ఉండి ఒక్క నుదుటి మీద, కాళ్ళ దగ్గర తెల్లగా ఉంటే అది పంచకళ్యాణి. గుర్రం రంగే తెలుపైనప్పుడు ముఖం మీద మచ్చ మరో రంగులో ఉంటుంది.

పంచాస్యం, పంచాననం అంటే పెద్ద ముఖం ఉన్న జంతువు - సింహం. ఇక్కడ “పంచ” అంటే పెద్ద అనే అర్థంలో వాడబడింది.

పంచనఖం అంటే అయిదు గోళ్ళు ఉన్న జంతువు - పెద్దపులి. ఈ సందర్భంలోనే ”పంజా” అన్న మాట పుట్టి ఉంటుంది.

హైదరాబాదులో ఉన్న ”పంజాగుట్ట” అంటే ఐదు కొండలనే అర్థం స్ఫురిస్తోంది.

పంచతంత్రం అనగానే మిత్రలాభం, మిత్రభేదం గుర్తుకొస్తాయి. కొంచెం చదువుకున్న ఘటానికి సంధివిగ్రహం జ్ఞాపకం వస్తుంది. మిగిలిన రెండింటి పేర్లు చెప్పుకోండి చూద్దాం!

న మ శి వా య అన్న అయిదు అక్షరాలే పంచాక్షరి మంత్రం! శివుడికి పంచాననుడు (అనగా, ఐదు ముఖములు కలవాడు) అన్న పేరు ఉందని ఎంతమందికి తెలుసు? ఎలిఫెంటా గుహలలో ఉన్న శివుడు పంచాననుడే కాని మనకు నాలుగు ముఖాలే కనిపిస్తాయి. అయిదవది లోకోత్తరం [లేదా "ట్రాన్‌సెండెంటల్"]. వీటి పేర్లు అఘోరం, ఈశానం, తత్పురుషం, వామదేవం, సద్యోజాతం.

వైష్ణవుడు కావడానికి పంచ సంస్కారాలు చేయాలి. తప్త చక్రాంకనం (అంటే, చక్రంతో వాత పెట్టడం?), నొసట ఊర్ధ్వ పుండ్రం, పేరు మార్పు, మంత్రజపం, యజనం [అంటే, దేవపూజ].

తంత్రవిద్యకి పంచ మకారాలు (అనగా, మద్యం, మత్స్యం, మాంసం, ముద్ర, మైథునం) ముఖ్యం అంటారు.

దేవ యజ్ఞము (హోమము), బ్రహ్మాయజ్ఞము (వేదాధ్యయనము), భూత యజ్ఞము (కాకబలి), పితృయజ్ఞము (పిండ తర్పణ క్రియ), మనుష్య యజ్ఞము (అతిథి పూజ) అనేవి ఐదు ప్రతి గృహస్థూ నిత్యం చెయ్యవలసిన పంచ మహా యజ్ఞములుగా పేర్కొన్నారు.

పంచబాణుడు మన్మథుడు. ఈయనకి అయిదు రకాల పువ్వుల బాణాలు ఉన్నాయి: అరవిందము [తామర], అశోకము, చూతము [మామిడి], నవమల్లిక, నీలోత్పలం [నల్లకలువ].

అరవిందమశోకం చ చూతం చ నవమల్లికా |
నీలోత్పలం చ పంచైతే పంచబాణస్య సాయకాః ||

పంచోపచారాలు: గంధం, పుష్పం, ధూపం, దీపం, నైవేద్యం

"పంచ" హిందీలోకి వెళ్ళి పాంచ్ అయింది. ఇంగ్లీషులోకి వెళ్ళి "పంచ్" అయింది. అయిదు రకాల పండ్ల రసాలు కలపగా వచ్చిన దానిని ఇంగ్లీషులో "పంచ్" అంటారు. పంచ్ లో "చుక్క" పడక్కరలేదు.

ఝీలం, చీనాబ్, రావి, బీయాస్, సట్లెజ్ అనే అయిదు నదులు ప్రవహించే దేశాన్ని పంజాబ్ అన్నారు. సనాతనుల దృష్టిలో పంచగంగలూ కావేరి, తుంగభద్ర, కృష్ణవేణి, గోదావరి, గంగానది. ఈ ఐదు నదులే పంచగంగలు ఎందుకు అయాయో, ఇందులో నాలుగు దక్షిణాది నదులవడంలో ఉన్న సూక్ష్మం ఏమిటో నాకు బోధపడడం లేదు.

పంచామృతాలు వేసుకుందికి వీలుగా ఐదు గదులు ఉన్న పాత్రని పంచపాత్ర అనేవారు, మొదట్లో. ఇటీవలి కాలంలో పంచపాత్ర అంటే పూజాసమయంలో ఉద్ధరిణితో వాడే ఏదైనా ఒక చిన్న పాత్ర. సంతర్పణలలోనూ, హోటేళ్ళలోనూ పచ్చళ్ళు, ఊరగాయలూ వడ్డించడానికి ఐదు పాత్రలు కలిసి ఉన్న పాత్రా విశేషాన్ని ఈ రోజుల్లో “గుత్తి” అంటున్నారు.

తిథి [”డేట్”], వారం [”డే ఆఫ్ ద వీక్”], నక్షత్రం [నిజానికి చంద్రుడు ఉన్న నక్షత్ర సముదాయం], యోగం [గ్రహాల కలయిక], కరణం [జాతకం] ఉన్న పుస్తకాన్ని పంచాంగం అంటాం.

అప్పు ఇచ్చిన వాడు, పుచ్చుకున్న వాడు, దస్తావేజ రాసిన వాడు, ఇద్దరు సాక్షులు సంతకం పెట్టిన కాగితం పంచారూఢీపత్రం అవుతుంది.

పంచభక్ష్యములు అంటే భక్ష్యం, భోజ్యం, లేహ్యం, చోష్యం, పానీయం. భక్ష్యం అన్నా భోజ్యం అన్నా “తినదగినది” [”ఎడిబుల్”] అనే నిఘంటుకారుడు చెప్పేడు. మరి ఈ రెండింటి మధ్య తేడా ఏమిటో? లేహ్యం అంటే ముద్దలా ఉన్నది, చోష్యం అంటే పీల్చదగ్గది లేదా జుర్రుకోడానికి వీలైనది. పానీయం అంటే తాగేది.

భూమి, నీరు, అగ్ని, గాలి ఈ నాలుగింటినీ అనాది కాలపు గ్రీకులు ముఖ్యమైన మూలకాలు లేదా “ఎసన్షియల్ ఎలిమెంట్స్” అనేవారు. ఈ భూలోకంలో ఉన్నవి అన్నీ ఈ నాలుగింటి తోటే తయారయాయనీ స్వర్గలోకంలో ఉన్నవన్ని మరొక అయిదవ పదార్థంతో చేయబడ్డాయనీ నమ్మేవారు. ఈ “అయిదవ పదార్థం” గ్రీకు భాషలో “క్వింటిసెన్స్” అయింది. "క్వింట్" అంటే అయిదు, “ఎసెన్స్” అంటే ముఖ్యం అని అర్థం. ఎంతో ముఖ్యమైన విషయం అని ఇంకా నొక్కి వక్కాణించవలసి వచ్చినప్పుడు ఇంగ్లీషులో “క్వింటిసెన్స్” అన్న మాట వాడతారు.

ఈ ఐదింటిని మనవాళ్ళు పంచభూతములు అన్నారు. కాని మనవాళ్ళు ఈ ఐదవ ధాతువుని ఆకాశం అనమన్నారు. ఆకాశం శూన్యానికి సంకేతం కనుక గ్రీకు వారి క్వింటిసెన్సు మనకి సున్నా అయింది!

పంచగవ్యములు అంటే ఆవు వల్ల మనకు లభించే అయిదు ముఖ్యమైన పదార్థాలు: అవి పాలు, పెరుగు, వెన్న, గోపంచితం, గోమయం. మరీ ఉచ్చ, పేడ అంటే నాటుగా ఉంటుందేమోనని “గోపంచితం”, “గోమయం” అన్నాను, అంతే.

పంచామృతాలు: ఆవుపాలు, పెరుగు, నెయ్యి, చక్కెర, తేనె. ఈ జాబితాలో చక్కర ఇమడదని న అభిప్రాయం.

ఉపనయనం చేసినప్పుడు పంచశిఖలు ఎందుకు చేస్తారో, దానిలోని అంతరార్థం ఏమిటో ఎవరైనా విడమర్చి చెబితే బాగుండును.

పంచపాండవుల గురించి నాకు ఎవ్వరూ విడమర్చి చెప్పక్కరలేదు. వాళ్ళు మంచపుకోళ్ళలా ముగ్గురు అని నాకు రెండవ తరగతి లోనే తెలుసని ఒకరు చెప్పేరు.

పంచమవేదం అంటే ఐదో వేదం అని అర్థం. పంచమవేదం ఏదయ్యా అంటే మహాభారతం అని కొందరు, ఆయుర్వేదం అని మరికొందరు అంటూ ఉండగా విన్నాను. ఆయుర్వేదంలో పంచకర్మలు ఉన్నాయి. "ఆ పంచకర్మలు ఏవి?" అని అడిగితే రకరకాల సమాధానాలు వచ్చేయి. వాంతి చేయించడం, విరేచనం అయేటట్లు చేయడం, ముక్కులో తైలం పొయ్యడం వగైరాలు ఆధునిక కాలంలో వ్యాపారానికి ఆకర్షణీయంగా లేవని కాబోలు అయిదు నక్షత్రాల హొటేళ్లల్లో ఉత్తర అధునాతన ఆయుర్వేద భిషక్కులు కొత్త చికత్సా విధానాలు ప్రవేశపెట్టేరు.

పంచజ్ఞానేంద్రియములు ఏమిటో మనకి తెలుసు. ముక్కు మన ఘ్రాణేంద్రియం, నాలుక రసనేంద్రియం, కన్ను చక్షురింద్రియం, చెవి శ్రోత్రేంద్రియం, చర్మం త్వగింద్రియం. త్వక్ అంటే చర్మం.

పంచమహాపాతకాలు: కల్లు త్రాగడం, గురుపత్నితో సంగమించడం, బ్రాహ్మణుడిని చంపడం, దొంగతనం చేయడం, ఈ లక్షణాలున్న వాడితో స్నేహం చేయడం అని మహాభారతంలో ఉంది.

ఇలా చాకలిపద్దులా చెప్పుకుంటూ పోతే పంచ మాటలు చాలా చెప్పుకోవచ్చు: పంచప్రాణాలు, పంచలోహాలు, పంచ మహాకావ్యాలు (తెలుగులో, సంస్కృతంలో), పంచ ఆరామ క్షేత్రాలు (అమరావతి, భీమవరం, పాలకొల్లు, సామర్లకోట, ద్రాక్షారామం), పంచోపచారాలు (స్నానం, పూజ, నైవేద్యం, ప్రదక్షిణం, నమస్కారం), పంచ తన్మాత్రలు, పితృపంచకం, మాతృపంచకం, వగైరాలు.

గణితంలో 5 కి ప్రాముఖ్యత లేకపోలేదు. ప్రధాన సంఖ్యలలో 5 మూడవ ప్రధాన సంఖ్య. అంతే కాదు. ఇది రెండు కవల ప్రధాన సంఖ్యలలో కనిపించే ఏకైక సంఖ్య: (3,5) ఒక కవల , (5,7) మరొక కవల. ఈ లక్షణం ప్రదర్శించే సంఖ్య ఇదొక్కటే!

హేమచంద్ర-ఫిబొనాచీ వరుసక్రమంలో, అనగా 1, 1, 2, 3, 5, 8....వరుసలో, 5 అయిదవ స్థానంలో ఉండడం గమనార్హం! ఈ లక్షణం ప్రదర్శించే సంఖ్య ఇదొక్కటే!

అంతే కాదు. అయిదు “ఫెర్మా ప్రధాన సంఖ్య” అవడం వల్ల కేవలం నిటారు బద్ద, వృత్తలేఖిని సహాయంతో పంచభుజిని నిర్మించవచ్చు. (“ఫెర్మా ప్రధాన సంఖ్య” అంటే ఏమిటో గూగులమ్మని అడిగి తెలుసుకోండి.)

భుజాలు పూర్ణాంకాలు అయిన అతి చిన్న లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం పొడుగు 5. (మిగిలిన రెండు ఆసన్న భుజాల పొడుగులు 2, 3 అని గమనించండి.)

రేఖాగణితంలో పెంటగన్‌ని పంచభుజి అంటారు. అమెరికా ప్రభుత్వపు దేశరక్షణ విభాగం పంచభుజి ఆకారంలో ఉన్న ఒక పెద్ద భవనంలో ఉంది. అందుకని ఆ భవనాన్ని “పెంటగన్” అంటారు. ఇది భవనం పేరు కనుక దీన్ని మనం తెలుగులోకి అనువదించి పంచభుజి అనక్కర లేదు. అలాంటప్పుడు మన “లాల్ ఖిల్లా”ని ఇంగ్లీషువాడు “రెడ్‌ఫోర్ట్” అంటూంటే మనం ఎందుకు ఊరుకున్నాం?

భారతదేశపు రక్షణ శాఖా విభాగానికి షడ్భుజి ఆకారంలో ఒక భవనం నిర్మించి దానికి షడ్భుజి అని పేరు పెడితే అమెరికావాడు తప్పకుండా ఉడుక్కుంటాడు!

పంచతంత్రంలో మిగిలిన రెండింటి పేర్లు లబ్ధనాశం, అసంప్రేక్ష్యకారిత్వం అని ఇప్పటికేనా తెలుసుకోండి.

6. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఆరు

శిక్షా కల్పో వ్యాకరణం నిరుక్తం ఛందసాం చయః |
జ్యోతిషామయనం చైవ వేదాంగాని షడేవతు ||

శిక్ష, వ్యాకరణం, ఛందస్సు, నిరుక్తం, జ్యోతిషం, కల్పం - ఈ ఆరింటిని వేదాంగములు అంటారు.

శిక్ష వేద మంత్రాలని ఎలా పలకాలో చెబుతుంది. ఛందస్సు (prosody) వేద మంత్రాల రచనా విధానాన్ని వివరిస్తుంది. వ్యాకరణం వేద మంత్రాలలో పాటించిన వ్యాకరణ సూత్రాలని చెబుతుంది. నిరుక్తం వైదిక శబ్దాల వ్యుత్పత్తిని (etymological meaning) వివరిస్తుంది. జ్యోతిషం ఖగోళశాస్త్ర (astronomy) సంబంధిత విషయాలని వివరిస్తుంది. కల్పం యజ్ఞయాగాదుల నిర్వహణలో వేద మంత్రాలని ఎలా ఉపయోగపరచుకోవాలో చెబుతుంది.

అధ్యాపనము అంటే వేదాలు, ఇతర శాస్త్రాలు బోధించడం. అధ్యయనం అంటే తాము చదువుకోవడం, యజనం అంటే యజ్ఞములు చేయటం, యాజనము అంటే యజ్ఞములను చేయంచడం, దానం అంటే ఇతరులకు దానం చేయడం, ప్రతిగ్రహం అంటే ఇతరుల నుంచి దానములు స్వీకరంచడం - ఈ ఆరంటినీ షట్కర్మలు అంటారు.

కామ, క్రోధ, లోభ. మోహ, మద, మాత్సర్యాలు అరిషడ్వర్గాలు – అంటే ఈ ఆరూ శత్రు గణం.

సనాతన ధర్మానికి మూలాధారమైన షడ్దర్శనాలని మూడు జంటలుగా చెప్పడం ఆచారం: న్యాయ-వైశేషికాలు, సాంఖ్య-యోగాలు, పూర్వ మీమాంశ-ఉత్తర మీమాంశలు.

షడ్రసాలు కూడ మూడు జంటలే: ఉప్పు-పులుపు, తీపి-కారం, చేదు-ఒగరు. “రసాలు (రుచులు) అయిదా? ఆరా? అన్న ప్రశ్నకి ఇంతవరకు నికరమైన సమాధానం దొరకలేదు” అంటున్నారు శాస్త్రవేత్తలు. తీపి, పులుపు, చేదు, ఉప్పన, ఉమామి అనేవి ప్రాధమిక రుచులు అని ఆధునిక శాస్త్రం చెబుతోంది. ఉమామి అన్నది మనకి పరిచయం లేని రుచి. చైనా, జపాను వారి వంటకాలలో ఈ రుచి తగులుతుంది.

అతివృష్టి, అనావృష్టి, మిడుతలు, పందికొక్కులు, చిలుకలు, చేరువరాజులు – ఈ ఆరు ఈతి భాదలు అని అంటారు కాని, చేరువరాజులుకి బదులు రాజకీయ నాయకులు అని ఉంటే బాగుంటుందేమో.

ఈర్ష్యాళువు, జగుప్సావంతుడు, నిస్సంతోషి, క్రోధనుడు, నిత్యశంకితుడు, పరభాగ్యోపజీవి అనువారు దుఃఖభాగులని నీటి కోవిదులు చెబుతారు!.

ఋతువులు ఆరు: వసంత, గ్రీష్మ, వర్ష, శరత్, హేమంత, శిశిర ఋతువులు

ఆరు ముఖాలు ఉన్న కుమారస్వామి షడాననుడు.

షష్ఠి అంటే ఆరు, షష్టి అంటే అరవై అని గమనించవలసిందిగా ప్రార్థిస్తున్నాను.

షట్పదం అంటే ఆరు కాళ్లు కలది అని అర్థం. నిఘంటువులో దీని అర్థం తుమ్మెద అని ఉంటుంది. కాని, ఆరు కాళ్లు కల ఏ కీటకాన్నయినా ఈ పేరుతో పిలవచ్చు.

క్రైస్తవులు ఈ సృష్టి ఆరు రోజులలో జరిగిందనిన్నీ, ఏడవ దినాన్న సృష్టికర్త విశ్రాంతి తీసుకున్నాడని నమ్ముతారు.

రామాయణంలో బాల, అయోధ్య, అరణ్య, కిష్కింధ, సుందర, యుద్ధ కాండలు ఉన్నాయి.

గణితంలో ఆరుకి ఒక విశిష్ట స్థానం ఉంది; ఎందుకంటే, 6 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3. అనగా 1 నీ, 2 నీ, 3 నీ వేసి గుణిస్తే 6 వస్తుంది. తమాషా ఏమిటంటే 1 నీ, 2 నీ, 3 నీ కలిపినా 6 వస్తుంది. ఈ లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలని పరిపూర్ణ సంఖ్యలు (perfect numbers) అంటారు. పరిపూర్ణ సంఖ్యలలో 6 అతి చిన్నది; తరువాత పరిపూర్ణ సంఖ్య 28 అని నిర్ధారించుకోవడం పాఠకులకి వదలిపెడుతున్నాను. అటుపైన వచ్చే పరిపూర్ణ సంఖ్యలని నిర్ధారించడం అంత తేలికైన పని కాదు.

గణితంలో ఒక శాఖ అయిన త్రిగుణమాత్రుకంలో ఆరు ప్రధాన ప్రమేయాలు ఉన్నాయి. వాటి పేర్లు: సైను, కోసైను, టేంజెంటు, కోసీకెంటు, సీకెంటు, కోటేంజెంటు.

సైను అనే ఇంగ్లీషు మాట "జీవ" అనే సంస్కృత పదం నుండి పుట్టిందంటే నమ్మగలరా?

గ్రీకు భాషలో అరుని సూచించడానికి "హెక్స్" అనే పూర్వప్రత్యయాన్ని వాడతారు, లాటిన్ లో "సెక్స్" అనే పూర్వప్రత్యయాన్ని వాడతారు.

కనుక ఇంగ్లీషులో "హెక్సగన్" షడ్భుజం అవుతుంది. అంటే ఆరు భుజాలు కల రేఖాకృతి. దీనినే షట్కోణి అని కూడ అంటారు.

సముద్రంలో పడవ ఎక్కడుందీ తెలుసుకోడానికి వాడే పరికరం వృత్తంలో ఆరో భాగం ఆకారంలో ఉంటుంది కనుక దానికి "సెక్స్టెంట్" అని పేరు పెట్టేరు. దీనికి "షడ్భాగి" అని తెలుగులో పేరు పెట్టుకోవచ్చు.

ఆరుగురు ఆసామీలు ఉన్న వాద్య బృందాన్ని ఇంగ్లీషులో "సెక్స్టెట్" అంటారు. ఆరుగురు పిల్లలు ఒకేసారి ఒకే గర్భం నుండి పుడితే వారిని కవలలు అనకూడదు; "సెక్స్ట్యుప్లెట్స్" అనాలి. ఈ మాటకి తెలుగు మాట తెలియక ఇంగ్లీషులో వాడుకలో ఉన్న మాటని వాడేను.

విశ్వవిద్యాలయాల్లో వాడే "సెమెస్టర్" అన్న మాట "సెమెస్ట్రిస్" అనగా "ఆరు నెలలు" అన్న లేటిన్ మూలం నుండి వచ్చింది.

7. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఏడు

ఏడు అంటే సంవత్సరం. ఏడు + ఆది = ఏడాది కనుక ఏడాది అంటే సంవత్సరానికి మొదలు అనే అర్థం వస్తున్నాది కదా. కనుక "మా అబ్బాయికి ఏడాది నిండింది" అనే ప్రయోగం తప్పు అని నా అభిప్రాయం. "మా అబ్బాయికి ఒక ఏడు నిండింది" అనాలని నేను అనుకుంటున్నాను.

ఏడు అనేది రోదించుకి సమానార్థకం అనుకొని కొందరు ఏడుని అశుభంగా భావించి ఏడు కి బదులు ఆరున్నొక్కటి అంటారు. పెళ్లిళ్లల్లో వధూవరుల చేత సప్త పదులు తొక్కిస్తారు కదా. అటువంటప్పుడు ఏడు అశుభం ఎలా అవుతుంది? అవదు. రోదించు అనాలనుకుంటే ఏడ్చు అనాలి.

పెళ్లి అంటే గుర్తుకి వస్తోంది. పెళ్లిలో సప్తర్షి మండలంలో ఉన్న అరుంధతిని చూపిస్తారు. "అరుంధతి కాదు కాని ఆరు వేలు అప్పు కనిపిస్తున్నాది" అన్నాడుట ఒక ప్రబుద్ధుడు. ఈ నక్షత్రం కంటికి కనిపిస్తే దృష్టి బాగున్నట్లు లెక్క అనే అభిప్రాయం అరేబియాలో కూడా ఉంది.

సప్త ఋషుల జాబితా యుగాన్ని బట్టి మారుతూఉంటుందిట. ప్రస్తుతం ఈ జాబితాలో ఉన్నవారు: కశ్యపుడు, గౌతముడు, అత్రి, విశ్వామిత్రుడు, భరద్వాజ, జమదగ్ని, వశిష్ఠుడు.

"ఏడుకొండలవాడా, వేంకటరమణా! గోవిందా! గోవింద!" అనడంలో ఉన్న ఇంపు "ఆరున్నొక్క కొండలవాడా!" అంటే వస్తుందా? రాదు! ఈ ఏడూ కొండలని సప్తగిరులు అంటారు. వాటి పేర్లు: శేషాద్రి, నీలాద్రి, గరుడాద్రి, అంజనాద్రి, వృషభాద్రి, నారాయణాద్రి, వేంకటాద్రి.

సప్తమాతలు: 1. బ్రాహ్మి, 2. మహేశ్వరి, 3. కౌమారి, 4. వైష్ణవి, 5. వారాహి, 6. ఇంద్రాణి, 7. చాముండ. దుర్గా సప్తశతిలో వీరు దుర్గాదేవి ప్రతిరూపాలుగా వచ్చి రాక్షస సంహారం కావిస్తారు;

ఈ ఏడు ని వాడడం ఇష్టం లేకనో ఏమో కాని కుండలినీ యోగంలో ఉన్న ఏడు చక్రాలని షట్చక్రాలంటారు. కుండలినిలో అడుగు నుండి మీదకి ఉన్న చక్రాల పేర్లు: మూలాధార, స్వాధిష్ఠాన, మణిపూరక, అనాహత, విశుద్ధ, ఆజ్ఞ, సహస్రార.

ఊర్ధ్వ లోకాలు ఏడు: భూ, భువస్, సువర్, మహస్, జనస్, తపస్, సత్య. అధో లోకాలు ఏడు: అతలం, వితలం, సుతలం, తలాతలం, రసాతలం, మహాతలం, పాతాళం. ఈ అధోలోకాల లక్షణాలు ఈ దిగువ సూచించిన విధంగా ఉంటాయిట.

అతలం - అగాధ ప్రాంతానికి చెందినది. భయము, కామము దీని లక్షణాలు.

వితలం - నిరసించడం లక్షణంగా కలిగినది. ఇక్కడ సుఖం ఉండదు, విపరీతమైన కోపం ఉంటుంది.

సుతలం - బాగా లోతైన అనే అర్థం. అసూయ దీని లక్షణం.

తలాతలం - అంధకారం, తామసికం దీని లక్షణం. గందరగోళం, అస్పష్టమైన ఆలోచనలకు, అమితమైన మొండితనానికి ఇది స్థానం.

రసాతలం - స్వార్థపరత్వం, ఆధిపత్య ధోరణి, కేవలం తన గురించి మాత్రమే ఆలోచిస్తూ ఉండడం దీని లక్షణాలు.

మహాతలం - అవివేకము దీని లక్షణము. అవివేకం అంటే ఏది మంచి, ఏది చెడు, ఏది ధర్మం, ఏది అధర్మం, ఏది సత్యం, ఏది అసత్యం, ఏది శాశ్వతము, ఏది అశాశ్వతము అనేవి తెలుసుకోలేక అసత్యమైన వాటి వెంటపడే లక్షణం. నరక లోకం యొక్క తీవ్రత ఇక్కడి నుంచే మొదలవుతుంది.

పాతాళం - కాకోలం అనే నల్లని విషం ఉండే ప్రాంతం. పతనమైన, లేదా పాపిష్టి పనులకు మూలం ఇది. దుర్బుద్ధి, దుష్టభావాలకు నిలయం. ఇక్కడుండే జీవులు వినాశనం కోసం వినాశనం చేస్తారు, హింసించటం కోసం హింసిస్తారు, చంపడం కోసం చంపుతారు.

ఏడు లోకాలు ఉన్నాయనే నమ్మకం హిందువులలోనే కాదు; ఇతర మతాలలో కూడా ఉంది.

సప్తస్వరాలు: స (షడ్జము), రి (ఋషభం), గ (గాంధారం), మ (మధ్యమం), ప (పంచమం), ద (ద్వైతం), ని (నిషాదం). ,

మన సప్త స్వరాలైన సరిగమపదని లకి చివర స చేర్చి ఆ ఎనిమిదింటిని “ఆక్టేవ్” అన్నారు పాశ్చాత్యులు – అంటే, ఎనిమిది మాత్రల కాలం అని అర్థం.

సప్తర్షులనీ, సప్తసముద్రాలనీ, సప్తద్వీపాలనీ వర్ణించిన మన పెద్దలు ఇంద్రధనుస్సులో ఉన్న ఏడు రంగులని సప్తవర్ణములు అని చెప్పకపోవడం శోచనీయంగానే కనిపిస్తుంది.

మనకి పంచ మహాపాతకాలు ఉన్నట్లే క్రైస్తవులకి ఏడు మహాపాతకాలు ఉన్నాయి (seven deadly sins): కామము (lust), క్రోధము (wrath), అత్యాశ (greed), మదము (pride), తిండిపోతుతనం (gluttony), బద్ధకం (laziness), మాత్సర్యము (envy).

క్రైస్తవులకి ఏడు మహాపాతకాలు ఉన్నట్లే మనకి సప్త వ్యసనాలు ఉన్నాయి: జూదం, మద్యం, దొంగతనం, వేట, వ్యభిచారం, దుబారఖర్చు, కఠినంగా మాట్లాడటం.

ఏజంట్ 007 ప్రపంచ ప్రఖ్యాతి చెందిన పత్తేదార్!

గణితంలో ఏడు కి ఒక ప్రత్యేకత ఉంది. ఒకటిని ఏడు చేత భాగించగా వచ్చే లబ్ధాన్ని చూడండి.

0. 142857 142857 142857 … …

ఇక్కడ దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే అంకెలు ఆరు అయిన తరువాత అవే అంకెలు పదే పదే నిర్విరామంగా పునరావృత్తమవుతూ వస్తాయి. తమాషా ఇంతటితో అయిపోలేదు. ఈ ఆరు అంకెల సంఖ్యని తీసుకుని దానిని 2, 3, 4, 5, 6 చేత వరసగా గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాలలో ఈ ఆరు అంకెలే పదే పదే ప్రత్యక్షమవుతూ వస్తాయి తప్ప 0, 3, 9 కనబడవు. ఆ గుణకారాలు ఈ దిగువ చూపిస్తాను, చూడండి. ఇక్కడ నక్షత్రం గుణకారానికి గుర్తు.

142857 * 2 = 285714

142857 * 3 = 428571

142857 * 4 = 571428

142857 * 5 = 714285

142857 * 6 = 857142

అంతే కాకుండా, ప్రతీ లబ్ధములోని అంకెలు, తారుమారు కాకుండా, ఒకే వరుస క్రమంలో, చక్రీయంగా దర్శనమిస్తాయి. అంటే 2, 8 తరువాత 5, 7, 1, 4 ఆ వరుసలోనే కనిపిస్తాయి.

గణితంలో 7 మరొక లక్షణం ఉంది. ఏదైనా సంఖ్యని 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించగలమా? లేమా? అన్న సమశ్య ఎదురైనప్పుడు ఈ దిగువ ఉదాహరణలో సూచించిన విధంగా చెయ్యండి.

ఉదాహరణ 1: ఇచ్చిన సంఖ్య 434 అనుకోండి. దీనిని 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించగలమా? నాకు 7 వ ఎక్కం అంత దూరం రాదు. ఎలా? ఇచ్చిన సంఖ్యని రెండు భాగాలుగా విడగొట్టి 43 4 అని రాయండి. ఇప్పుడు 4 ని 5 చేత గుణించి 43 కి కలపండి.

4 x 5 + 43 = 63

ఏడు తొమ్మిదులు 63. అనగా 63 ని 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించగలం. కనుక 434 కూడా 7 చేత భాగించగలం.

ఉదాహరణ 2: ఇచ్చిన సంఖ్య 1792 అనుకోండి. దీనిని 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించగలమా? ఇచ్చిన సంఖ్యని రెండు భాగాలుగా విడగొట్టి 179 2 అని రాయండి. ఇప్పుడు 2 ని 5 చేత గుణించి 179 కి కలపండి.

2 x 5 + 179 = 189

నాకు 7 వ ఎక్కం అంత దూరం రాదు. ఎలా? పైన వచ్చిన 189 ని రెండు భాగాలుగా విడగొట్టి 18 9 అని రాయండి. ఇప్పుడు 9 ని 5 చేత గుణించి 18 కి కలపండి.

9 x 5 + 18 = 63

ఏడు తొమ్మిదులు 63. అనగా 63 ని 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించగలం. కనుక 1792 కూడా 7 చేత భాగించగలం.

ఒక సరదా ప్రశ్న

నాలుగు 7 లు, ఒక 1 మాత్రమే ఉపయోగించి కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగారం, కుండలీకరణాలు మాత్రమే వాడి 100 వచ్చేటట్లు అమర్చగలరా? ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం వేరొక అధ్యాయం చివర ఇస్తాను.

8. అంకెలు, సంఖ్యలు: ఎనిమిది

“ఓం నమోనారాయణాయ” అనే తారక మంత్రం అష్టాక్షరిగా వ్యవహరించబడుతోంది.

‘అనుష్టుప్’ అని పిలువబడే ఛందస్సులో వ్రాయబడిన పద్యమే శ్లోకము. దీనిలో ఒక్కొక్కటి 8 అక్షరాలు కలిగిన 4 పాదాలు ఉంటాయి. వాల్మీకి రామాయణం, వేంకటేశ్వర సుప్రభాతం, విష్ణుసహస్రనామం, వంటి సుపరిచితమైన చాలా సంస్కృత రచనలు శ్లోక రూపంలోనే రచించబడ్డాయి.

ఎనిమిది పాదాలు ఉన్న శ్లోకం అష్టపది. ఎనిమిది పద్యాలున్న స్తోత్రాన్ని అష్టకం అంటారు.

సాలెపురుగుకి ఎనిమిది పాదాలుంటాయి కాని, దానిని అష్టపది అని అనడం నేను వినలేదు.

బుద్ధుడు బోధించినది అష్టాంగ మార్గం. ఆ మార్గాలు ఏమిటయ్యా అంటే – సమ్యగ్దృష్టి, సమ్యస్సంకల్పం, సమ్యగ్వాక్కు, సమ్యక్కర్మ, సమ్యగ్జీవనం, సమ్యగ్వ్యాయామం, సమ్యక్స్మృతి, సమ్యక్సమాధి.

ఎనిమిది శరీర అవయవాలతో చేసేదే సాష్టాంగ నమస్కారం. సాష్టాంగ నమస్కారం మగవారే చెయ్యవచ్చుట.

అష్టభోగములు - 1. గృహము, 2. శయ్య, 3. వస్త్రము, 4. ఆభరణము, 5. స్త్రీ,   6. పుష్పము, 7. గంధము, 8. తాంబూలము.

అష్టవసువులు - 1. ధరా, 2. పావక, 3. అనిల, 4. అప, 5. ప్రత్యూష, 6. ప్రభాస, 7. సోమ, 8. ధ్రువ.

దంతములు కలిగినది దంతి, అంటే ఏనుగు. భూమికి ఎనిమిది దిక్కుల్లోనూ ఎనిమిది ఏనుగులు నిలబడి (దేనిపై?) భూభారాన్ని మోస్తున్నాయని పురాణ కథనం. వాటినే అష్ట దిగ్గజాలు లేక అష్ట దిగ్దంతులు అంటారు. వాటికి పేర్లు కూడా ఉన్నాయి : ఐరావతము, పుండరీకము, వామనము, కుముదము, అంజనము, పుష్పదంతము, సార్వభౌమము, సుప్రతీకము.

అష్టకష్టాలు అంటే దేశం వదలి వెళ్ళడం, భార్యా వియోగం, కష్టాల్లో మునిగి ఉన్నప్పుడు బంధువులు వచ్చి పడటం, ఎంగిలి కూడు తినవలసి రావడం, శత్రువులతో కలసి ఉండవలసిన పరిస్థితి, తిండి కోసం ఎవరి దయాదాక్షిణ్యాల మీదనో ఆధారపడటం, భంగపాటు,దారిద్య్రం. దీనిని అర్థం చేసుకున్నవాడెవడూ వయసులో తన కన్న పెద్దదాన్ని భార్యగా చేసుకోడు. చేసుకుంటే, ఫలితం చివరిలో తెలుస్తుంది. సాధారణంగా, ఎవరు ఎప్పుడు వెళ్ళిపోతారు అనేది ఎవరూ చెప్పలేరు. కాని, కనీసం, వయసుల ప్రకారం చూసుకుంటే పెద్దవాళ్ళు ముందుగా వెళ్ళిపోవడానికి అవకాశాలు ఎక్కువ కాబట్టి భార్య వయసు తక్కువ ఉండేలా చూసుకోవడం మగవాడి చేతిలో ఉన్న పని. దానిని ఉపేక్షిస్తే కోరి 'రెండవ' కష్టాన్ని తెచ్చుకున్నట్లే! ఉరకలు వేసే వయసులో ఇటువంటి వాటిని పట్టించుకోకుండ చేసే చిన్న తప్పులకు తరువాత భారీగా మూల్యం చెల్లించవలసి రావడానికి అవకాశాలు మెండు!

అష్టాగ్నులు, అష్టకర్మలు, అష్టగణపతులు, అష్టలక్ష్మిలు, అష్టదిక్పాలకులు, అష్టనాయికలు, అష్టసిద్ధులు, అష్టైశ్వర్యాలు, ..., ఇలా ఎన్నో “అష్ట” మాటలు మన భాషలో ఉన్నాయి.

పాణిని రచించిన వ్యాకరణ గ్రంథంలో ఎనిమిది అధ్యాయాలు ఉన్నాయి కనుక దానిని అష్టాధ్యాయి అన్నారు.

అష్టభాషలలో సంస్కృతం, ప్రాకృతం, శౌరసేని, మాగధి, పైశాచి, చూళికాపైశాచి, అపభ్రంశం, తెలుగు ఉన్నాయనిన్నీ ఇందులో తెలుగు ఉండడం గమనించదగ్గ విషయమనిన్నీ మనవి చేసుకుంటున్నాను.

ఒక్క తెలుగు భాషలోనే అష్టావధానం అనే ప్రక్రియ మొదలయింది. కన్నడంలో కూడ ప్రయత్నాలు జరిగేయని విన్నాను కాని ఇది తెలుగు వారి సొత్తేమో అని అనిపిస్తూ ఉంటుంది. మరో విషయం. ఈ రోజుల్లో అష్టావధానులకి అమెరికాలో ఉన్న పలుకుబడి, గిరాకి ఇండియాలో ఉన్నట్లు కనిపించదు.

“అష్టవర్షా భవేత్కన్యా” అన్న శ్లోకాన్ని ఉదహరిస్తూ మనవాళ్లు ముక్కుపచ్చలారని అమ్మాయిలకి పెళ్లిళ్లు చేసేసి వాళ్లని అష్టకష్టాలు పెట్టేసేవారు.

బ్రహ్మో దైవస్తదైవార్ష: ప్రజాపత్యస్తథాసురః |
గాంధర్వో రాక్షసశ్చైవ పైశాశ్చా ష్టమో 2 ధమః || (మనుస్మృతి 3-21)

బ్రహ్మము, దైవము, అర్షము, ప్రాజాపత్యము, ఆసురము, గంధర్వం, రాక్షసము, పైశాచికం, అని వివాహాలు ఎనిమిది రకాలు. వీటిల్లో మొదటి నాలుగు రకాలు ఈ రోజుల్లో జరగడం లేదు.

వరుడు వధువుకు, ఆమె బంధువులకు తన శక్తి మేరకు ధనము ఇచ్చి, తన ఇష్ట ప్రకారం చేసుకునే వివాహం ఆసుర వివాహం.

స్త్రీపురుషులు ఇరువురు ఒకరి పట్ల మరొకరు గాఢమైన అనురక్తితో చేసుకునే వివాహం గంధర్వ వివాహం.

కన్య యొక్క బంధువులు వివాహానికి సమ్మతించని యెడల అడ్డు పడిన వారందరినీ హత్య చేసి, ఖండఖండాలుగా వారిని నరికి, ఏడుస్తున్న కన్యను ఆమె ఇంటినుండి బలవంతముగా తీసుకెళ్ళి చేసుకునే వివాహం రాక్షస వివాహం.

ఒక స్త్రీని ఆమె ఇష్టంతో పని లేకుండా, నిద్రిస్తున్న దానిని, లేదామత్తులోఉన్నదానిని, లేదా ఏమరుపాటుగా ఉన్నదానిని బలాత్కారముగా అనుభవిస్తే దానిని పైశాచిక వివాహం అంటారు. ఈ ఎనిమిదవ తరహా వివాహం అష్టవిధ వివాహాలలో అధమమైనది.

అష్టవంకరలున్న అష్టావక్రుడి కథలోనే ఈ విశ్వం ఎంత పురాతనమైనదో విశదీకరించే పిట్టకథ ఒకటి ఉంది. ఈ అష్టావక్రుడి తండ్రి ఏకపాదుడు. ఈ కథ నేను రాసిన విశ్వస్వరూపం అన్న పుస్తకంలో వివరంగా ఉంది.

అష్టా, చెమ్మా అనే ఆటలో అష్టా అంటే ఎనిమిది ఎలా వచ్చిందో ఊహించకలను కాని చెమ్మా అంటే నాలుగెలా అయిందో ఊహకి అందడం లేదు. చార్ లోంచి వచ్చిందేమో.

ఎనిమిదికి భారత, భాగవత కథలలో కొంత ప్రత్యేకత ఉంది. అష్టవసువుల్లో ఎనిమిదవ వాడే భీష్ముడు. శ్రీకృష్ణుడు దేవకీ వసుదేవులకి అష్టమి నాడు పుట్టిన ఎనిమిదవ సంతానం, పైపెచ్చు దశావతారాలలో ఎనిమిదవ అవతారం.

చైనాలో 8 కి అదృష్టానికి అవినాభావ సంబంధం ఉంది. వాళ్ళకి 8 మీద ఎంత మోజు అంటే బైజింగ్ ఒలింపిక్ కార్యక్రమాన్ని 2008 ఆగస్టు 8 తేదీన సాయంకాలం 8 గంటల 8 నిమిషాల 8 సెకండ్లకి మొదలు పెట్టేరు.

కొలమానాలలో - అమెరికాలో 8 ఔన్సులు ఒక కప్పు; 8 పైంట్లు ఒక గేలను; బ్రిటన్ లో 8 ఫర్లాంగులు ఒక మైలు.

దశాంశ పద్ధతిలో ఒక సంఖ్యని 8 చేత నిశ్శేశంగా భాగించగలమో లేమో తెలుసుకోవాలంటే ఆ సంఖ్య చివర ఉన్న మూడంకెల సంఖ్యని 8 చేత నిశ్శేశంగా భాగించగలిగితే చాలు. ఉదా: 680 ని 8 చేత నిశ్శేషంగా భాగించగలం. 56680 ని కూడ 8 చేత నిశ్శేషంగా భాగించగలం.

ఇటీవలి కాలంలో కూడ ఎనిమిది కొంత ప్రత్యేకత సంతరించుకుంది. నలుగురు మనుషులు ఉన్న మేళాన్ని ఇంగ్లీషులో "క్వార్టెట్" అన్నట్లే ఎనిమిది వస్తువుల గుంపుని ఇంగ్లీషులో ఆక్టేట్ అంటారు. వార్తాప్రసారణ సిద్ధాంతంలో ఎనిమిది ద్వింకముల గుంపుని కూడ ఆక్టెట్ అనే అంటారు. ఇక్కడ “ద్వింకము” అన్నది ద్వియాంశ అంకము (బైనరీ డిజిట్) అన్న మాటకి సంక్షిప్త రూపం. కంప్యూటర్ రంగంలో ఎనిమిది ద్వింకముల గుంపుని “బైట్” అంటారు. ఎనిమిది చింతపిక్కల గుంపుకి గుర్రం అనిన్నీ, నాలుగు చింతపిక్కల గుంపుకి పుంజీ అనిన్నీ పేర్లు పెట్టగలిగిన తెలుగువాళ్లు ఎనిమిది ద్వింకముల గుంపుకి కూడ ఒక తెలుగు పేరు పెట్టగల సమర్ధులే - ఎందుకు పెట్టలేదో.

సరదా ప్రశ్నకి సమాధానం

$(7 + 1/7) \times (7 + 7) = 100$

9. అంకెలు, సంఖ్యలు: తొమ్మిది

“తొన్ను” ని “పది” తో సంధించగా “తొమ్మిది” వచ్చిందని అనుకుంటే ఈ మాట యొక్క వాచ్యార్థం “పది కంటె ఒకటి తక్కువ.” ఇక్కడ ఏ రకం సంధి కార్యం జరిగిందో నాకు తెలియదు కాని ఈ రకం ప్రయోగం – అనగా “పది కంటె ఒకటి తక్కువ,” “ఇరవై కంటె ఒకటి తక్కువ”, వగైరా - ఇతర భాషలలో కూడ కనిపిస్తుంది. ఒక భాష నుండి మరొక భాషలోకి ఇది ఎలా వ్యాపించిందో పరిశోధన చేసి చూడాలి.

తొమ్మిదిని సంస్కృతంలో “నవ” అంటారు. కాని తెలుగులో “నవ” అన్న మాటని మూడర్థాలులో వాడతారు: కొత్త, తొమ్మిది, దురద. ఈ మూడర్థాలతోటీ ఏ విధమైన సంబంధమూ లేని “నవ” మాటలు కూడ ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి మెట్రిక్ పద్ధతి అమలు లోకి రాడానికి పూర్వం కృష్ణా జిల్లాలో వాడుకలో ఉండే “నవటాకు” అంటే సేరులో ఎనిమిదో వంతు, తొమ్మిదో వంతు కాదు. పైపెచ్చు ఒక “నవటాకు” = 10 తులాలు. .

ఇదే విధంగా “నవరసు” అన్న మాటలో “నవ” నేతిబీరకాయలో నెయ్యి లాంటిది. “నవరసు” అనే మాట “సావరిన్” (sovereign) అనే ఇంగ్లీషు మాటకి బ్రష్టరూపం. తెలుగులో ఈ మాటని కేవలం బంగారపు నాణేలని ఉద్దేశించి మాత్రం వాడేవారు. ఇదే విధంగా నవారు, నవాబు, నవాసారం అనే మాటలలో “నవ” కి కొత్తదనంతో కాని, తొమ్మిదితో కాని, దురదతో కాని ఏ విధమైన సంబంధం ఉన్నట్లు తోచదు.

ఆశ్వయుజ శుద్ధ పాడ్యమి లగాయతు నవమి వరకు నడిచే కాలాన్ని నవరాత్రులు అంటారు. దీనినే దసరా అని కూడ అంటారు. “దశరాత్రి పండుగ” అనే సమాసానికి క్లుప్త రూపమే దసరా అని ఎంతమందికి తెలుసు? అంటే "నవరాత్రులు" లో చివరి రోజుని విజయదశమి అంటారా? ఇక్కడ ఎదో లెక్క తప్పింది!

శృంగారము, హాస్యము, కరుణము, వీరము, రౌద్రము, భయానకము, బీభత్సము, అద్భుతము, శాంతము - అనే తొమ్మిది రసములను నవరసములు అంటారు.

నవధాన్యాల పేర్లు: వడ్లు, ఉలవలు, పెసలు, మినుగులు, నువ్వులు, గోధుమలు, అనుములు (అలసందలు, బొబ్బర్లు), కందులు, సెనగలు.

నవరత్నాలు ఏవేవో నాకు ఇప్పటికి ఇదమిత్థంగా తెలియదు. ఒక్కొక్క చోట ఒక్కొక్కలా ఉన్నాయి. ఈ సందిగ్ధతకి కారణం ఇంగ్లీషు పేర్లకి, తెలుగు (సంస్కృతం) పేర్లకి మధ్య పొత్తు లేకపోవడం. అమరకోశం ప్రకారం Emeralds అంటే పచ్చలు. కానీ గరుత్మతం, మరకతం, అశ్వగర్భం, హరిన్మణి అన్నా పచ్చలే. అనగా ఈ నాలుగూ పచ్చలలో రకాలో లేక "పచ్చలు" అన్న మాటకి నానాఅర్థాలో నాకు తెలియదు. అలాగే Rubies అంటే కెంపులు. ఈ కెంపులలో కూడా రకాలు ఉన్నాయి: శోణరత్నం, లోహితకం, పద్మరాగం. పగడం తెలుగు, ప్రవాళం సంస్కృతం. ముత్యం తెలుగు, మౌక్తికం సంస్కృతం. ఈ సందర్భంలో gem అంటే రత్నం కానీ మణి కాని అవుతుంది.

ఈ రకం వైవిధ్యతని మనస్సులో పెట్టుకుంటే, ఒక జాబితా ప్రకారం నవరత్నాలు ఇవి: 1. వజ్రం (diamond), 2. వైడూర్యం (cat 's eye or lapis lazuli), 3. నీలం (blue sapphire), 4. గోమేధికం (topaz or onyx), 5. పుష్యరాగం (topaz), 6. గరుడ పచ్చ (emerald), 7. కెంపు (ruby), 8. పగడం (red coral), 9. ముత్యం, (pearl). ఇంగ్లీషులో చూస్తే, "these gems are 1. diamond, 2. chrysoberyl cat's eye, 3. blue sapphire, 4. orange hessonite garnet, 5. yellow sapphire, 6. emerald, 7. ruby, 8. red coral, and 9. pearl" అని ఉంది. నిజానికి ఆభరణాలలో వాడే విలువైన రాళ్ళు తొమ్మిది కంటే ఎక్కువే ఉన్నాయి!

నవరసాలు: హాస్యం, శృంగారం, కరుణ, శాంత, రౌద్ర, భయానక, బీభత్స, వీర

నవదుర్గలు: శైలపుత్రి, బ్రహ్మచారిణి, చంద్రఘంట, కూష్మాండ, స్కందమాత, కాత్యాయని, కాళరాత్రి (మహాగౌరి), సిద్ధిధాత్రి.

నవగ్రహాలలో తొమ్మిదో గ్రహం అయిన ప్లూటో "గ్రహం కాదు" అని వాదించి దానిని గ్రహాల జాబితాలోంచి దింపేశారు. ప్లూటోకి ఈ దుర్దశ ఎన్నాళ్లు ఉంటుందో తెలియదుకాని, ఇటుపైన అల్లుడిని "జామాతా నవమ గ్రహః" అని అనాలో ఏమో అని నేను కంగారు పడ్డ మాట మాత్రం వాస్తవం. కాని మనకి ఆ బెంగ అక్కరలేదు. ప్లూటో గ్రహం అయినా కాకపోయినా మన నవగ్రహ పూజలకి ఢోకా లేదు. మనం ప్లూటోనే కాదు యూరెనస్ (ఉచ్చారణ యురేనస్ కాదు) ని కూడ గ్రహాల జాబితాలో ఎప్పుడూ వెయ్యలేదు. మన జ్యోతిష శాస్త్రపు దృష్టిలో ఒక నక్షత్రమైన సూర్యుడూ గ్రహమే, ఉపగ్రహమైన

చంద్రుడూ గ్రహమే, మిథ్యాబిందువులయిన రాహు, కేతువులూ గ్రహాలే. కనుక తెలుగులో "గ్రహం" ఇంగ్లీషులో "ప్లేనెట్" కి సమానార్థకం కాదు.

నవజని లో "నవ" అంటే తొమ్మిదీ కాదు, కొత్తా కాదు. నవాసారాన్ని సున్నాన్ని కలపగా వచ్చే గాఢమైన అమ్మోనియా వాయువుకి నేను పెట్టిన తెలుగు పేరు. ఉదజని, నత్రజని లాగే నవజని ఒక వాయువు.

"నవామ్లం" అన్నది "ఎమీనో ఏసిడ్" కి నేను పెట్టిన తెలుగు పేరు. ప్రాణ్యాలు (proteins) అనే గొలుసులలో నవామ్లాలు పూసల లాంటివి. ఈ గొలుసులు-పూసలు నమూనాలో పూసలు గుండ్రంగా, సౌష్టవంగా ఉండకుండా, కొంచెం కోలగా, గురువింద గింజ మాదిరి ఒక పక్క ఎర్రగా, రెండవ పక్క నల్లగా ఉన్నట్లు ఊహించుకోవాలి. అప్పుడు ఎర్రగా ఉన్న మొనని "ఎమీన్ శీర్షం" లేదా "నవ శీర్షం" అనిన్నీ, నల్లగా ఉన్న మొనని "ఆమ్ల శీర్షం" అనిన్నీ పిలవొచ్చు. నవ శీర్షం, ఆమ్ల శీర్షం ఉన్న ఈ బణువులని "నవామ్లాలు" (amino acids) అంటారు.

పూర్వం, రోజుకి పన్నెండు గంటలే ఉండే రోజుల్లో, తొమ్మిదో (ఇప్పటి లెక్కలో మధ్యాహ్నం మూడు) గంట వేళప్పుడు చేసే దేవతార్చనని లేటిన్‌లో "నోన్" అనే వారు. ఇందులోంచే ఇంగ్లీషు "నూన్" వచ్చింది.

గణితంలో తొమ్మిదికి ప్రత్యేక స్థానం ఉంది. తొమ్మిదిని ఉపయోగించి రకరకాల లెక్కలు, చమత్కారపు గారడీలు ("ట్రిక్కులు") చెయ్యవచ్చు.

మొదటి గారడీ. ఒక సంఖ్యలోని అంకెలని కూడగా వచ్చిన మొత్తం 9 కి గుణకం అయితే ఆ సంఖ్యని 9 చేత నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు. ఉదాహరణకి 6363 ని తీసుకుందాం. ఈ సంఖ్యలో అంకెలని కూడగా వచ్చిన మొత్తం 18. ఇది 9 యొక్క గుణకమే కదా. కనుక 6363 ని 9 చేత భాగిస్తే శేషం ఉండదు.

రెండవ గారడీ. ఏదైనా ఒక సంఖ్యని తీసుకొండి. మచ్చుకి 26 అనుకుందాం. దీనిని తిరగేస్తే 62 వచ్చింది కదా. ఈ రెండింటిలో పెద్ద దాని నుండి చిన్న దానిని తీసివెయ్యగా 36 వచ్చింది. ఈ 36 ని 9 చేత నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు.

మూడో గారడీ . మన 9 ని 1 చేత, 2 చేత, 3 చేత, … అలా గుణించుకుంటూ పోయినప్పుడు వచ్చే లబ్ధాలు 9, 18, 27, 36,… వగైరా కదా. ఈ లబ్ధాలలో ఉన్న అంకెలని కూడగా వచ్చే మొత్తం ఎల్లప్పుడూ తొమ్మిదే.

భారతీయ గణితశాస్త్రంలో “నవాధికేన” అనే సూత్రం ఉంది. దీన్ని ఇంగ్లీషులో “కేస్టింగ్ ఔట్ ద నైన్స్” (casting out the nines) అంటారు. లాటిన్ లో preuve par neuf అంటారు. కేలుక్యులేటర్లు లేని రోజుల్లో కూడికలు, గుణకారాలు సరిగ్గా చేసేమో లేదో చూసుకుందుకి నవాధికేన సూత్రం వాడేవారు. ఉదాహరణకి 239 ని 4649 తో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధం 111 111 1 అని ఎవరో చెప్పేరనుకుందాం. మన దగ్గర కలనయంత్రాల వంటి పరికరాలు లేవనుకుందాం. అప్పుడు పైన నుడివిన గుణకారపు ఫలితం తప్పా, ఒప్పా అని ఎలా నిర్ణయించటం? ఈ సందర్భంలో నవాధికేన సూత్రం ఉపయోగించేవారు. అదెలాగో చెబుతాను. మొదట 2, 3, 9 లని కూడగా 14 వచ్చింది కదా. ఇందులోంచి 9 తీసెయ్యగా 5 మిగిలింది. దీనిని అలా ఉంచి, ఇప్పుడు 4649 లో ఉన్న అంకెలని కలిపితే 23 వచ్చింది. ఇందులోంచి 9 ని రెండు సార్లు తీసివెయ్యగా 5 మిగిలింది. ఇందాకటి 5 నీ ఈ 5 నీ గుణిస్తే 25 వచ్చింది. ఇందులో ఉన్న 2, 5 కలపగా 7 వచ్చింది. ఇహ ఇందులోంచి 9 తీసెయ్యటానికి కుదరదు కనుక ఈ 7 ని అలా ఉంచి, ఇప్పుడు లబ్ధంలో ఉన్న ఏడు ఒకట్లని కలపగా మళ్లా 7 వచ్చింది కనుక మనం చేసిన గుణకారం మూడొంతులు ముప్పాతిక తప్పు కాదు అని నిర్ణయిస్తాం. మనం చేసిన గుణకారం ఖరాఖండీగా ఒప్పు అని చెప్పటానికి వీలు లేదు.

మరొక ఉదాహరణ.

2^32 + 1 = 4294967297 = 641 x 6700417

అని ఒకరు చెప్పేరనుకుందాం. ఇది అవునో కాదో ఎలా తెలుస్తుంది?

కుడి పక్క ఉన్న రెండు కారణాంకాలలోని అంకెలని కూడగా 6 + 4 + 1 = 11, 6 + 7 + 4 + 1 + 7 = 25 వచ్చేయి కదా. ఈ సంఖ్యలలో ఉన్న అంకెలని తిరిగి కూడగా 1 + 1 = 2, 2 + 5 = 7 వచ్చేయి కదా. ఇప్పుడు ఈ రెండింటిని గుణించగా 2 x 7 = 14. ఈ రెండింటిని కలపగా 5 వస్తుంది. ఇప్పుడు మధ్యలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్యలో అంకెలని కలపగా 59 వస్తుంది. వీటిని కలపగా 14, తరువాత 5 వస్తాయి. కనుక 4294967297 = 641 x 6700417 మూడొంతులు ముప్పాతిక ఒప్పే!

గణితంలోనే కాకుండా మన ప్రాచీన సంస్కృతిలో తొమ్మిదికి ఒక ప్రత్యేకమైన స్థానం ఉంది. రెండు చిన్న ఉదాహరణలు ఇస్తాను. నూట ఎనిమిది మనకి చాల పవిత్రమైన సంఖ్య. దేవుడిని

అష్టోత్తరశతనామాలతో స్తుతిస్తాం. ఉపనిషత్తులు 108. ఈ 108 లో ఉన్న అంకెలని కలిపితే 9 వస్తుంది.

మరొక ఉదాహరణ. కలియుగం పొడుగు 4,32,000 సంవత్సరాలు. ఈ సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం 9. ద్వాపర యుగం పొడుగు దీనికి రెండింతలు, అనగా 8,64,000 సంవత్సరాలు. ఈ సంఖ్యలో ఉన్న అంకెలని కలపగా 18, వీటిని కలపగా 9. ఇదే విధంగా త్రేతాయుగం, కృతయుగం. ఈ నాలుగు యుగాల కాలం అయిన ఒక మహాయుగంలో 43,20,000. ఈ సంఖ్యలో అంకెలని కూడగా 9. ఒక కల్పంలో 71 మహాయుగాలు కనుక కల్పంలో 30,67,20,000 సంవత్సరాలు. ఇందులో ఉన్న అంకెలన్నీ కలిపితే 18, వీటిని కలిపితే 9. ఇలా తొమ్మిది పదే పదే రావటాన్ని చూస్తే ఎవ్వరో లెక్కల మీద పిచ్చి ఉన్న వ్యక్తి తయారు చేసిన ప్రణాళికలా కనిపిస్తుంది.

10. అంకెలు, సంఖ్యలు: 10 నుండి 99 దాకా

మన దేశంలో కనిపెట్టబడ్డ దశాంశ పద్ధతికి పది మూలం.

మన చేతులకి పది వేళ్లు. పాదాలకి పది. మన పాదాలకి ఉన్న వాటిని కూడ “వేళ్లు” అనే అంటాము కాని ఇంగ్లీషులో చేతి వేళ్లని “ఫింగర్స్” అనిన్నీ, కాలి వేళ్లని “టోస్” అనిన్నీ అంటారు. కాని “డిజిట్” అన్నప్పుడు కాలి వేలైనా కావచ్చు, చేతి వేలైనా కావచ్చు.

దశకంఠుడైన రావణుడిని దశరధుడి కొడుకు, దశావరాతాలలో ఒకడు, అయిన రాముడు సంహరించేడు.

దశావతారాలు : మత్స్య, కూర్మ, వరాహ, నరసింహ, వామన, పరశురామ, శ్రీరామ, శ్రీకృష్ణ, బుద్ధ, కల్కి.

దశ సంస్కారాలు : వివాహం, గర్భాదానం, పుంసవనం, సీమంతం, జాతకకర్మ, నామకరణం, అన్నప్రాశనం, చూడకర్మ, ఉపనయనం, సమవర్తనం

పదకొండు, పన్నెండు

తెలుగులో పది, ఒందు పదకొండు ఎలా అయిందో అదే విధంగా పాత ఇంగ్లీషులో “ఎలెవెన్” అంటే “(పదిమీద) మిగిలింది ఒకటి” అని అర్థం.

దక్ష ప్రజాపతి కూతురు అదితికి పుట్టిన వారిలో రుద్రులు పదకొండుమంది, ఆదిత్యులు పన్నెండుమంది.

ఏకాదశ రుద్రులు :-
1. మన్యు, 2. మను, 3. మహినస, 4. మహాన్, 5. శివ, 6. ఋతధ్వజ, 7. ఉగ్రరేతా,
8. భవ, 9. కాల, 10. వామదేవ, 11. ధృతవృత.

ద్వాదశాదిత్యులు :-
1. త్వష్ట, 2. పూష, 3.వివస్వాన్, 4. మిత్ర, 5. ధాతా, 6. విష్ణువు, 7. భగ, 8. వరుణ,
9. సవిత, 10. శక్ర, 11.అంశ, 12. ఆర్యమ.

జ్యోతిర్లింగాలు పన్నెండు: హిమాలయ పర్వతాలలో కేదారేశ్వరలింగం, కాశీలో విశ్వేశ్వరుడు, మధ్యప్రదేశ్ లో మహాకాలేశ్వరలింగం, ఓంకారేశ్వరలింగం, గుజరాత్ లో సోమనాధలింగం, నాగేశ్వరలింగం, మహారాష్ట్ర లో భీమశంకరం, త్ర్యంబకేశ్వరం, ఘృష్ణేశ్వరం, వైద్యనాదేశ్వరం, ఆంధ్రప్రదేశ్ (శ్రీశైలం) లో మల్లిఖార్జునలింగం, తమిళనాడులో రామలింగేశ్వరం.

రాశులు: మేషం, వృషభం, మిథునం, కర్కాటకం, సింహం, కన్య, తుల, వృశ్చికం, ధనుస్సు, మకరం, కుంభం, మీనం.

తెలుగు నెలలు: చైత్రం, వైశాఖం, జ్యేష్ఠం, ఆషాఢం, శ్రావణం, భాద్రపదం, ఆశ్వీయుజం, కార్తీకం, మార్గశిరం, పుష్యం, మాఘం, ఫాల్గుణం.

పదకొండు వ్యుత్పత్తి జరిగిన విధంగానే "ట్వెల్వ్" అర్థం "(పదిమీద) మిగిలింది రెండు". ఇది కాస్తా సంస్కృతంలో తిరగబడి ద్వ, దశ (రెండు, పది) కలసి ద్వాదశ అయింది. ఇదే మాట లేటిన్‌లో "డూవోడెసిం." ఇక్కడ "డూవో" అంటే రెండు, "డెసిం" అంటే పది. మాటకట్టడి చూసేరా? లేటిన్‌కీ సంస్కృతానికీ పోలిక ఉంది. పాత ఇంగ్లీషుకీ తెలుగుకీ పోలిక ఉంది. ఈ డూవోడెసిం అన్న లేటిన్ మాట భ్రష్టయి ఇంగ్లీషులో "డజను"గా మారింది. కనుక డజనుని ద్వాదసికి భ్రష్టరూపంగా తెలుగులోకి తీసేసుకోవచ్చు. లేదా డజనుని తెలుగులో ద్వాదశం అనొచ్చు. ఇలాంటి నియమాలు ఒక డజను సంపాదించగలిగితే ఇంగ్లీషు మాటల్ని డజన్ల కొద్దీ తెలుగులోకి తీసుకురావచ్చు.

పదమూడు

పాశ్చాత్యదేశాలలో, హోటళ్ళు మొదలైన అంబరచుంబితాలలో (అంటే "స్కైస్క్రేపర్"లలో) సాధారణంగా పదమూడో అంతస్తు ఉండదు. అంటే, పన్నెండు తర్వాత పద్నాలుగు వస్తుంది. మనకి

ఏడు ఎలాగో పాశ్చాత్యులకి పదమూడు అలాగ. ఏసు క్రీస్తుని శిలువ వేసే ముందు ఆయన తిన్న "ఆఖరు భోజనం" వద్ద పదమూడుగురు ఉన్నారుట! పదమూడు వల్ల కీడు కలుగుతుందనే భయాన్ని "త్రిస్కైడేకాఫోబియా" అంటారు. తెలుగువాళ్ళకి త్రయోదశి భీతి లేదు కానీ అమావాశ్య అంటే కొంచెం భయం ఉంది.

ఇంగ్లీషులో ఎలెవెన్, ట్వెల్వ్ లకి తెలుగులో పదకొండు, పన్నెండు లతో పోలిక ఉన్నాదని చెప్పేను కదా. ఈ పోలిక తర్వాత కనపడదు. థర్టీన్ = త్రీ + టీన్ అయితే తెలుగులో పది + మూడు = పదమూడు అయింది కాని మూడు + పది కాలేదు. ఇంగ్లీషులో ముందు మూడు, తరువాత పది వస్తే తెలుగులో కొంచెం తిరకాసు వచ్చింది. ఇదే తిరకాసు "నైన్‌టీన్" వరకు కనిపిస్తుంది.

ఇక్కడ సంస్కృతంలో లెక్క పెట్టే పద్ధతిని ఒకసారి పునర్విమర్శిద్దాం. ఉదాహరణకి, ఎనభైరెండుని ద్వ్యశీతి అంటే 2, 80 అనీ, ఎనభై మూడుని త్ర్యశీతి అంటే 3, 80 అనీ చెబుతూ, ఎనభై తొమ్మిది దగ్గరికి వచ్చేసరికి "నవాశీతి" అనకుండా "ఏకోన నవతి" అన్నారు. అంటే "తొంభైకి ఒకటి తక్కువ" అని అర్థం. ఈ పద్ధతి ఇంగ్లీషులోనూ తెలుగులోనూ కూడ కనిపించదు. కాని రోమక సంఖ్యలని రాసేటప్పుడు ఈ సంస్కృతంలో వాడే పద్ధతినే ఇప్పటికీ వాడుతున్నాం అని గమనించండి. ఉదా: IX = పది కంటె ఒకటి తక్కువ.

పద్నాలుగు, పదిహేను, పదహారు

మనం తొమ్మిది రాత్రులని నవరాత్రులు అన్నట్లే ఇంగ్లీషులో పద్నాలుగు రాత్రులని "ఫోర్టీన్ నైట్స్" అంటారు. దీన్ని కుదిస్తే "ఫోర్ట్‌నైట్" అవుతుంది.

తిథులు: పాడ్యమి, విదియ, తదియ, చవితి, పంచమి, షష్ఠి, సప్తమి, అష్టమి, నవమి, దశమి, ఏకాదశి, ద్వాదశి, త్రయోదశి, చతుర్దశి, అమావాస్య /పౌర్ణమి.

పక్కా తెలుగు వాడికీ పదహారుకీ ఏదో తీయని సంబంధం ఉండబట్టే పదహారణాల ఆంధ్రుడు అన్న పేరు వాడుకలోకి వచ్చింది.

పద్దెనిమిది

భారతంలో పద్దెనిమిదికి చాలా ప్రాముఖ్యత ఉంది. అష్టాదశ పర్వాలు. భారత యుద్ధంలో పద్దెనిమిది అక్షౌహిణుల సైన్యం. భగవద్గీతలో పద్దెనిమిది అధ్యాయాలు. ఈ 18 అధ్యాయాలలో ఉన్న 700 చిల్లర శ్లోకాలని 18 శ్లోకాలలోకి కుదించి దానిని అష్టాదశగీత అన్నారు. పురాణాలు, ఉపపురాణాలు పద్దెనిమిదేసి ఉన్నాయి.

ఒక సంఖ్యలోని అంకెలన్నిటిని కలపగా వచ్చిన మొత్తాన్ని రెట్టింపు చేస్తే అదే సంఖ్య వచ్చే లక్షణాన్ని ప్రదర్శించేది ఒక్క 18 ఒక్కటే! (1+8)*2 = 18.

పద్దెనిమిది తరువాత

పచ్చీస్‌పాళీ ఉత్తరాది వారి ఆట అనుకుంటాను. ఈ ఆటలోనే దస్సు, దీదస్సు, పచ్చీసు వస్తాయి.

నక్షత్రాలు 27: అశ్విని, భరణి, కృత్తిక, రోహిణి, మృగశిర, ఆరుద్ర, పునర్వసు, పుష్యమి, ఆశ్లేష, మఖ, పుబ్బ, ఉత్తర, హస్త, చిత్త, స్వాతి, విశాఖ, అనూరాధ, జ్యేష్ఠ, మూల, పూర్వాషాఢ, ఉత్తరాషాఢ, శ్రవణం, ధనిష్ఠ, శతభిషం, పూర్వాబాద్ర, ఉత్తరాభాద్ర, రేవతి. వీటినే ఇంగ్లీషులో lunar asterisms అంటారు.

నక్షత్రాల పేర్లకి మాసాల పేర్లకి మధ్య పోలిక కేవలం కాకతాళీయం కాదు. పౌర్ణమి నాడు చిత్తా నక్షత్రంతో ఉంటే అది చైత్ర మాసం, పౌర్ణమి నాడు విశాఖ నక్షత్రంతో ఉంటే అది వైశాఖ మాసం,

దేశానికి కొత్తగా వచ్చే మనుషులకి జబ్బు చేస్తే వారిని కొన్నాళ్ళు ” క్వారన్‌టీన్”లో పెడతారు అంటే. ఆగంతుకులకి ఏమైనా అంటురోగాలుంటే అవి మిగిలిన వాళ్ళకి సోకకుండా నలభైరోజుల పాటు ఏకాంతరవాసం ఏర్పాటు చేస్తారు. ఫ్రెంచి భాషలో “క్వారంటె” అంటే నలభయ్!

తెలుగు సంవత్సరాలు 60: (1) ప్రభవ (1927, 1987, 2047, 2107), (2) విభవ (1928, 1988, 2048, 2108), (3) శుక్ల (1929, 1989, 2049, 2109), (4) ప్రమోదూత (1930, 1990, 2050, 2110), (5) ప్రజోత్పత్తి (1931, 1991, 2051, 2111); (6) అంగీరస (1932, 1992, 2052, 2112), (7) శ్రీముఖ (1933, 1993, 2053, 2113), (8) భావ (1934, 1994, 2054, 2114), (9) యువ (1935, 1995,

2055, 2115), (10) ధాత (1936, 1996, 2056, 2116), (11) ఈశ్వర (1937, 1997, 2057, 2117), (12) బహుధాన్య (1938, 1998, 2058, 2118), (13.) ప్రమాది (1939, 1999, 2059, 2119), (14) విక్రమ. (1940, 2000, 2060, 2120), (15) వృష (1941, 2001, 2061, 2121), (16) చిత్రభాను (1942, 2002, 2062, 2122), (17) స్వభాను, (1943, 2003, 2063, 2123), (18) తారణ (1944, 2004, 2064, 2124), (19) పార్థివ (1945, 2005, 2065, 2125), 20.వ్యయ (1946, 2006, 2066, 2126), (2) .సర్వజిత్తు (1947, 2007, 2067, 2127), (22) సర్వదారి (1948, 2008, 2068, 2128), (23) విరోధి (1949, 2009, 2069, 2129), (24) వికృతి (1950, 2010, 2070, 2130), (25) ఖర (1951, 2011, 2071, 2131), (26) నందన (1952, 2012, 2072, 2132), (27) విజయ (1953, 2013, 2073, 2133), (28) జయ (1954, 2014, 2074, 2134), (29) మన్మద (1955, 2015, 2075 , 2135), (30) దుర్మిఖి (1956, 2016, 2076, 2136), (31) హేవళంబి (1957, 2017, 2077, 2137), (32) విళంబి (1958, 2018, 2078, 2138), (33) వికారి (1959, 2019, 2079, 2139), (34) శార్వరి (1960, 2020, 2080, 2140), (35) ప్లవ (1961, 2021, 2081, 2141), (36) శుభకృత్ (1962, 2022, 2082, 2142), (37) శోభకృత్ (1963, 2023, 2083, 2143), (38) క్రోది (1964, 2024, 2084, 2144), (39) విశ్వావసు (1965, 2025, 2085, 2145), (40) పరాభవ (1966, 2026, 2086, 2146), (41) ప్లవంగ (1967, 2027, 2087, 2147), (42) కీలక (1968, 2028, 2088, 2148), (43) సౌమ్య (1969, 2029, 2089, 2149), (44) సాధారణ (1970, 2030, 2090, 2150), (45) విరోధికృత్ (1971, 2031, 2091, 2151), (46) పరీదావి (1972, 2032, 2092, 2152), (47) ప్రమాది (1973, 2033, 2093, 2153), (48) ఆనంద (1974, 2034, 2094, 2154), (49) రాక్షస (1975, 2035, 2095, 2155), (50) నల (1976, 2036, 2096, 2156), (51) పింగళ (1977, 2037, 2097, 2157), (52) కాళయుక్తి (1978, 2038, 2098, 2158), (53) సిద్ధార్థి (1979, 2039, 2099, 2159), (54) రౌద్రి (1980, 2040, 2100, 2160), (55) దుర్మతి (1981, 2041, 2101, 2161), (56) దుందుభి (1982, 2042, 2102, 2162), (57) రుదిరోద్గారి (1983, 2043, 2103, 2163), (58) రక్తాక్షి (1984, 2044, 2104, 2164), (59) క్రోదన (1985, 2045, 2105, 216), (60) అక్షయ (1986, 2046, 2106, 2166)

అరవైకి ఉన్న ఒ క ప్రత్యేకత: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ల చేత నిశ్శేషంగా భాగారానికి లొంగే అతి చిన్న సంఖ్య. అందుకనే అరవైకి మానవ సంస్కృతిలోనే ఒక ప్రత్యేక స్థానం ఉంది. మన పంచాంగంలో ఉన్న సంవత్సరాలు అరవై. అరవై ఏళ్ళు బతికితే అదొక మైలురాయి లాంటిది. కనుక మన సంస్కృతిలో షష్టిపూర్తికి అంత ప్రాముఖ్యత. గంటకి 60 నిమిషాలు, నిమిషానికి అరవై “సెకండు”లు, సెకండుకి అరవై “థర్డ్”లు. ఇదే విధంగా వృత్తంలో ఒక డిగ్రీకి అరవై నిమిషాలు, నిమిషానికి అరవై సెకండ్లు,

సెకండుకి అరవై థర్డ్లు. ఇప్పటికైనా అర్థమయిందా “సెకండు” అన్న మాటలోని అంతరార్థం? మనలో కొందరు “సెకండు షో”, “సెకండు హేండు” మొదలైన ఇంగ్లీషు మాటలని నిర్మొహమాటంగా వాడేస్తూ నిమిషంలో అరవైయవ వంతైన సెకండు దగ్గరకు వచ్చేసరికి దానిని “సెకను” అంటారు, అక్కడికేదో తెలుగు మీద అభిమానం మండిపడి పోతూన్నట్లు.

ఇప్పుడు 73 యొక్క ప్రత్యేకత చూద్దాం. ఇది ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాలో 21 వ సంఖ్య. ఈ 73 ని తిరగేస్తే వచ్చిన 37 ఆ జాబితాలో 12 వ (21 ని తిరగెయ్యగా వచ్చినది) సంఖ్య!

ఇప్పుడు సంఖ్యల పేర్లలో కనిపించే బాణీలు చూద్దాం. ఇరవై, ముప్ఫయ్, .. , తొంభయ్ అన్న సంఖ్యలు దరిదాపు అన్ని భాషలలోనూ ఒకే బాణీలో వెళతాయి. ఇరు + పది = ఇరువది లేదా ఇరవై, ఏను + పది = ఏబది లేదా ఏభయ్. ఆరు + పది = అరువది లేదా అరవై. కాని అరవై దాటిన తరువాత వచ్చే అంకెలు అన్ని భాషలలోనూ పైన ఉదహరించిన బాణీలో నడవవు. ఉదాహరణకి, ఏడు + పది = డెబ్బది ఎలాగయిందో అర్థం చేసుకోడానికి ఓపిక పట్టాలి. శ్రీ సురేశ్ కొలిచాల చెప్పగా తెలిసిందేమిటంటే ఈ వ్యాకరణ సూత్రాన్ని వర్ణవ్యత్యయం అంటారుట:

మూల ద్రావిడంలోని ధాతువులలో ప్రథమాక్షరంగా కనిపించని మూర్ధన్యాక్షరాలు (ట, ఠ, డ, ఢ, ణ, ళ, ఴ లు), ర-ఱ-ల లు తెలుగు-కుయి భాషలలో మాత్రమే కనిపించడాన్ని విశ్లేషిస్తూ శ్రీ భద్రిరాజు కృష్ణమూర్తి వర్ణవ్యత్యయం (metathesis) అనే ధ్వని పరిణామం వల్ల మూల ధాతువులలో ద్వితీయాక్షరంగా ఉన్న ఈ మూర్ధన్యాక్షరాలు మొదటి స్థానానికి చేరాయని వివరించారు (చూ. Telugu Verbal Bases p 51-52). ఉదాహరణలు:

లే(త) < *ఎల

రే(యి) < రెయి < *ఇరు

రోలు < ఒరలు < *ఉరల్

ఈ ధ్వని పరిణామం ఆధారంగా ఏడు + పది డెబ్బది ఎలా అయ్యిందో వివరించడం సులభం:

ఏడు + పది > డేబ్బది > డెబ్బది > డెబ్భై.

ఈ రకం ప్రవర్తన ఇంగ్లీషులో కనిపించదు కాని ఫ్రెంచి భాషలో ఎనభైని నాలుగు ఇరవైలు అనే అలవాటు ఉంది.

11. అంకెలు, సంఖ్యలు: 100 నుండి “టొర్రిపంతులు!” దాకా

“నూరు” ఎప్పుడు వాడాలో, “వంద” ఎప్పుడు వాడాలో అన్న సందేహ నివృత్తికి ఒక నియమమంటూ ఉన్నట్లు లేదు. “రెండు వందల,” “మూడు వందల” అని అంటాం కానీ "రెండు నూరులు," "మూడు నూరులు" అని అనం. అయినప్పటికీ "ఇన్నూరు, మున్నూరు" అనే వాడుక ఎరుగుదును.

డాలర్లో నూరోవంతు సెంటు. సెంటు అంటే నూరు అనే అర్థం కూడా ఉండబట్టే “సెంటు పెర్ సెంటు” అంటే “నూటికి నూరు” అయింది. క్రికెట్‌లో వంద పరుగులు తీస్తే అది “సెంచెరీ”. వంద సంవత్సరాల కాలమైన శతాబ్దం కూడ సెంచెరీయే.

పేరుకి నూరే కాని ఆచరణలో నూరుని నూరులా వాడని సందర్భాలు ఎన్నో ఉన్నాయి.

శతకంలో నూరు కాదు, నూట ఎనిమిది పద్యాలుంటాయి; కాని “వేమన శతకం”లో వందల కొద్దీ పద్యాలున్నాయి కనుక వాటిని వేమన పద్యాలంటేనే మెరుగేమో. పూజ చేయించేటప్పుడు చదివే అష్టోత్తరశతనామాలు 108. జపమాలలో 108 పూసలు ఉంటాయి. హిందూ పంచాంగంలో 27 నక్షత్రాలు ఉంటాయి; నక్షత్రానికి 4 పాదాల చొప్పున 27 x 4 = 108 పాదాలు. విష్ణుమూర్తి చేతిలో సుదర్శన చక్రానికి 108 “పళ్ళు” ఉంటాయిట!

ఈ 108 మనకి అనేక సందర్భాలలో తారసపడుతుంది. ఋగ్వేదంలో ఒక కల్పము యొక్క ప్రమాణం ఇవ్వబడింది.

శిక్షవిభిందో అస్మై చత్వార్యుతా,

దదత్ అష్టాపరః సహస్రాః

“నీవు విభిందు జ్ఞానమును ఇచ్చినావు. చత్వారి అష్టాపర అయుతః సహస్రాః. 4 ×108 ×10000 × 1000. గుణిస్తే 4,320,000,000 లకు సమానం అవుతుంది. ఇది ఒక కల్ప ప్రమాణం.” ఈ విషయం అన్ని పురాణాలలోనూ సూర్య సిద్ధాంతంలోనూ కూడా ఉంది.

సూర్యుడుకి భూమికి ఉన్న మధ్య దూరంలో ఉరమరగా 108 సూర్యగోళాలు పడతాయి (149.6/1.39 = 107.6). భూమికి చంద్రుడుకి ఉన్న మధ్య దూరంలో ఉరమరగా 108 చంద్రగోళాలు పడతాయి (384,400/3474 = 110.65). (ఇది కేవలం కాకతాళీయమే కానీ మరేవిధమైన పవిత్రత, ప్రత్యేకత లేదు.) ఇందువల్లనే భూమి మీద ఉన్న మనకి సూర్యబింబము, చంద్ర బింబము ఒకే పరిమాణంలో కనిపిస్తాయి.

“వంద పదహారు” కి బదులు “నూటపదహారు” అంటాం. ఈ నూటపదహారుకి మన సంస్కృతిలో ఒక ప్రత్యేక స్థానం ఉంది. కట్నం, పారితోషికం మొదలైనవి వంద ఇవ్వకూడదు, నూరు ఇవ్వకూడదు నూటపదహార్లు ఇవ్వాలి.

విశాఖపట్నం జిల్లాలో వంద మామిడి పళ్ళు కొంటే నూటపన్నెండు వస్తాయి. మామూలు వంద 100 అయితే “పెద్ద వంద” 112. ఈ ఆచారం ఇంగ్లండులోనూ ఉంది. “హండ్రెడ్‌వెయిట్” అంటే 112 పౌనులు. “హండ్రెడ్‌కౌంట్” అంటే 112 శాల్తీలు.

మనిషి ఆయుర్దాయం నూరన్న నమ్మకంతోటే నూరేళ్ళు నిండుగా బతుకు అని ఆశీర్వదిస్తాం. దీన్నే వేదాల్లో “జీవేమ శరదః శతం” అంటే “నూరేళ్ళు జీవించాలి” అని కోరుకోవడం. ఈ నూరేళ్ళూ ఎలా జీవించాలి? ఆరోగ్యంగా, ఇంకొకరి మీద ఆధారపడకుండా, సంఘశ్రేయస్సుకి భంగం కలగకుండా, జబ్బుపడి మంచం పట్టిపోకుండా, పనిచేస్తూ జీవించాలి.

ఈ రోజులలో చాల మంది నూరు దాటి బతుకుతున్నారు. అసలు గాంధీ గారు “నూట ఇరవై ఏళ్ళు బతుకుతాను” అని అనేవారు. ఈ నూట ఇరవై ఎక్కడి నుండి వచ్చిందా అని చాల రోజులు ఆలోచించేను.

పూర్ణాయువు 120 సంవత్సరాలు అనే నమ్మకానికి కారణం జ్యోతిష శాస్త్రంలో దొరుకుతుంది. జ్యోతిష శాస్త్రం ప్రకారం నవగ్రహాల దశలు - సంవత్సరాలలో - ఈ విధంగా ఉంటాయి: రవి - 6, చంద్రుడు – 10, కుజ – 7, రాహు – 18, గురు – 16, శని – 19, బుధ – 17, కేతు – 7, శుక్ర - 20. ఈ సంఖ్యలని కలిపితే 120 వస్తుంది.

ఇంగ్లీషులో "సెంటీపీడ్" అంటే వంద పాదాలు కల పురుగు అని అర్థం. కాని సెంటీపీడులని పట్టుకుని వాటి పాదాలు లెక్కపెడితే అవి 30 కీ 42 కీ మధ్య ఉంటాయి కాని వంద ఎప్పుడూ ఉండవు. "మిల్లీపీడు" అంటే వెయ్యి పాదాలు కల పురుగు. కాని వీటికి సాధారణంగా ఏ రెండు వందల కాళ్ళో ఉంటాయి, అంతే. (నేతిబీరకాయ లాంటి మాటలు ఇంగ్లీషులోనూ ఉన్నాయి.) ఈ మధ్య 750 కాళ్ళు ఉన్న మిల్లీపీడుని కనుక్కున్నారు. ఎక్కడైనా వెయ్యి కాళ్ళు ఉన్న మిల్లీపీడు దొరుకుతుందేమోనని వెతుకుతున్నారు. ఇవి పురాణాలలో పెట్టిన పేర్లు కావు కదా! శాస్త్రవేత్తలు వీటికి పేర్లు పెట్టడంలో పప్పులో కాలేసేరు! సెంటీపీడులనీ మిల్లిపీడులనీ కలిపి "మిరియపోడా" అంటారు. "మిరియడ్" అంటే పదివేలు. "మిరియపోడా" అంటే పదివేల కాళ్ళు ఉన్న పురుగు అని అర్థం. కనుక ఈ పేర్లన్నిటినీ అతిశయోక్తులుగా తీసుకోవాలి లేదా అజహర్లక్షణం అనుకోవాలి.

భగవద్గీతలో 700 శ్లోకాలు ఉన్నాయి; కొంచెం ఇటూ అటూగా!

సహస్రం అంటే వెయ్యి. విరాట్‌పురుషుడికి వెయ్యి తలలు, వెయ్యి కళ్ళు, వెయ్యి పాదాలు ఉన్నాయని వర్ణిస్తాం: "సహస్ర శీర్షం దేవం, సహస్రాక్షం సహస్రపాత్". ఇక్కడ "వెయ్యి" అంటే "ఎన్నో" అని అర్థం చెప్పుకోకుండా, "వెయ్యి తలలుంటే రెండు వేల కళ్ళు ఉండొద్దా?" అని అడగడం అవివేకం. ఇది అలంకారాలలో ఒకటయిన అజహర్లక్షణానికి మరొక ఉదాహరణ అని సరిపెట్టుకోవాలి.

ఇంగ్లీషులో "మిలినియం" అంటే వెయ్యి సంవత్సరాలు. దీన్నే మనం సహస్రాబ్దం అంటాం. పాశ్చాత్య పంచాంగం ప్రకారం, ఒక సహస్రాబ్దం దాటి మరొక సహస్రాబ్దంలోనికి ప్రవేశించిన సంధి యుగంలో "వైటుకె" సమస్య కారణంగా భారత దేశానికి ఆర్థికంగా ఎంతో మేలు జరిగింది!

మిల్లీ అంటే వెయ్యో వంతు. ఈ "మిల్లీ"లో నుండి ఉద్భవించిన "మైలు" అంటే వెయ్యి అంగల దూరం. "మిల్లి గరిటె" అంటే మిక్కిలి చిన్న గరిటె అని తెలుగులో అర్థం ఉండడం కేవలం కాకతాళీయం మాత్రమే.

వెయ్యి తరువాత వచ్చే సంఖ్యలలో ఎన్నదగ్గది శ్రీనివాస రామానుజన్ కనుక్కున్న 1729. రెండు ఘనాల మొత్తంగా, రెండు విధాలుగా రాయగలిగే అతి చిన్న సంఖ్య ఇదే అని రామానుజన్ చెప్పేరు. దీనిని "టేక్సీ సంఖ్య" అని పిలుస్తున్నారు.

వెయ్యిని ఇంగ్లీషులో “థౌజండ్” అంటాం కదా! “థౌజండ్” అంటే “గట్టివంద” లేదా ”పెద్దవంద”, అని అర్థం. ఇటలీ వాళ్ళు తీసిపోయారా? వాళ్ళు వెయ్యికి “మిల్లీ” తగిలించి దానిని “గట్టివెయ్యి” లేదా “మిలియోన్” చేసేరు. అదే మిలియన్ అయింది. కాని "గట్టి వంద" వెయ్యి అయితే "గట్టివెయ్యి" పదివేలు అవాలి, న్యాయంగా. కాని ఇక్కడ అయి చావలేదు.

యజుర్వేద, అథర్వణ వేద, శతపథ బ్రాహ్మణములు మొదలైన ప్రాచీన కృతులు త్రయత్రింశతి కోటి (33 కోట్లు) దేవతలు ఉన్నారని చెబుతాయి.

యజుర్వేదము లోని సంహితలో సంఖ్యామానము ఈ క్రింది విధంగా ఇవ్వబడింది. ఈ పేర్లు ఒకొక్క చోట ఒకొక్కలా ఉన్నాయి.
ఏక 1
దశ 10
శత 100
సహస్ర 1000
ఆయుత 10000
నియుత 100000
ప్రయుత1000000
అర్బుద 10000000
న్యర్బుద 100000000
సముద్ర 1000000000
మధ్య 10000000000
అంత 100000000000
పద్మ 100,000,000,000,000
పరార్థ 100,000,000,000,000,000

ఇంతింత పెద్ద సంఖ్యల అవసరం లేకుండా ఈ పేర్లు పెట్టవలసిన అవసరం రాదు కదా! మన ప్రాచీన వాఙ్మయంలో మను శ్రుతి, యాజ్ఞవల్క్య శ్రుతి వంటి శ్రుతులు, నిగమ, ఆగమ వంటి స్మృతులు ఉన్నాయి కదా. వేదాలు నిగమాలు, అనగా ప్రమాణాలు. ఆగమాలు దైవాన్ని ఎలా ప్రార్థించాలో చెప్పే సలహాలు. వీటిల్లో మళ్లా వైష్ణవ ఆగమాలు, శైవ ఆగమాలు, శక్తి ఆగమాలు ఉన్నాయి! శైవ ఆగమాలలో ఒకటైన

కామిక ఆగమంలో పరార్థ (100,000,000,000,000,000) “శ్లోకాలు” ఉన్నాయి ట. సూక్ష్మ ఆగమంలో పద్మ (100,000,000,000,000) “శ్లోకాలు” ఉన్నాయి ట. రోజుకి 86,400 సెకండ్లు కనుక సెకండుకి ఒకటి చొప్పున లెక్కపెట్టుకుంటూ వెళ్లినా కామిక ఆగమంలో వీటిని లెక్కపెట్టడానికే 1,000,000, 000,000 రోజులు పైబడి పడుతుంది. అనగా 3.18 బిలియను సంవత్సరాలు పడుతుంది. కనుక ఈ ఆగమాలలో ఇన్నిన్ని “శ్లోకాలు” ఉన్నాయన్నది కేవలం అతిశయోక్తి! కానీ ఇంతింత పెద్ద సంఖ్యలు గురించి ఆలోచించడం అతిశయోక్తి కాదు; మనం గర్వించదగ్గ విషయం!

వంద మన మస్తిష్కంలో ఎలా పాతుకుపోయిందంటే ఒకటి తర్వాత వంద సున్నలు వేస్తే వచ్చే సంఖ్యకి పేరేమిటి అనే సందేహం ఒకాయనకి వచ్చింది. సరదాగా పొడుపు కథలా కొడుకుని అడిగేడు. ఆ కొడుకుకి మాత్రం ఏం తెలుసు? సరదాగా ఒక పిచ్చి మాట తయారుచేసి “గూగోల్” అన్నాడు అదేదో సినిమాలో శివరావు “గిడిగిడి” అన్నట్టు. ఆ గూగోల్ స్థిరపడి పోయింది. మనందరికీ పరిచయం అయిన "గూగుల్" పేరుకి మూలం ఇక్కడే ఉంది!! (ఇది గూగుల్ కంపెనీ వారి మొదటి వర్ణక్రమ దోషం అయి ఉండొచ్చు!)

ఒకటి తర్వాత గూగోల్ సున్నలు చుట్టగా వచ్చిన సంఖ్య? దీన్ని “గూగోల్ప్లెక్స్” అనమని మరొక ప్రభృతుడు సలహా ఇచ్చేడు.

నా చిన్నతనంలో నేను నా తమ్ముడు వీధి వసారాలో కూర్చుని “అంకెల ఆట” ఆడుకుంటున్నాం (ఆ రోజులలో టీవీలు లేవుగా!).

“మరయితే ఒకటి తర్వాత గూగోల్ప్లెక్సు సున్నలు చుడితే …..?” అని అడిగేను.

అదే సమయంలో దారిన పోతున్న తొర్రిపంతులు గుమ్మం ముందు ఆగేడు.

అప్పుడే గుమ్మంలో ఆగిన ఆసామీని చూసిన నా తమ్ముడు, “టొర్రిపంతులు!” అన్నాడు.

అప్పటినుండి ఒకటి తర్వాత గూగోల్ప్లెక్సు సున్నలు చుడితే వచ్చే సంఖ్యని “టొర్రిపంతులు!” అనడం మొదలు పెట్టేం!!

12. అంకెలు, సంఖ్యలు: రాసే పద్ధతులు

అంకెలకి సంఖ్యలకి భాషతో ఉన్న సంబంధానికే ఇంతవరకు ప్రాధాన్యత ఇచ్చేం. కాని అంకెల కథ ఇంకా చాలా ఉంది.

ఉదాహరణకి అంకెలని రాయటం లో ఉన్న తేడాలని ఒక సారి పరిశీలిద్దాం. ఇప్పుడంటే అంకెలని రాయటంలో ఒక ఒరవడి స్థిరపడిపోయింది కానీ మొదట్లో ఇది అంత సులభ సాధ్యంగా ఉండేది కాదు.

అనాదికాలంలో, అంటే క్రీస్తు పూర్వం 3000 సంవత్సరాలకి ముందే, మట్టి పలకల మీద ఘంటపుచీల (wedge) తో రాసిన అంకెలు సుమేరియాలో దొరికేయి. ఘంటపుచీలని లేటిన్ భాషలో క్యునియస్ అంటారు కనుక ఈ రకపు రాతని క్యూనిఫారం రాత అంటారు. ఈ క్యూనిఫారం పద్ధతి నెమ్మదిగా బాబిలోనియాకి పాకిరింది. క్రీస్తు పూర్వం 1500 సంవత్సరపు కాలానికి, అంటే హామురాబీ రాజ్యం ఏలే రోజలకి, ఈ పద్ధతి బాగా చెలామణీలోకి వచ్చిన దాఖలాలు ఉన్నాయి. ఘంటపుచీల చివర "పక్కకి తిప్పి పడుక్కోబెట్టిన హంసపాదు ఆకారంలో" (> ఆకారంలో) ఒక ముద్రని తయారు చేసి, ఆ ముద్రతో మట్టి పలకల మీద అద్దకం అద్దినట్లు అద్దేవారుట. ఆ ముద్ర 10 కి గుర్తుట. రెండు హంసపాదు ముద్రలు ఇరవై తో సమానం. నాలుగు హంసపాదు ముద్రల తర్వాత రెండు నిలువు గీతలు గీస్తే అది నలభైరెండు తో సమానంట. ఇటువంటి ముద్రే దరిమిలా >< ఆకారం దాల్చి రోమక సంఖ్య X గా అవతరించి ఉండొచ్చు అని నా ఊహ!

ఈ కథనాన్ని బట్టి బాబిలోనియా వారికి సున్న అనే భావం కానీ, ఆ సున్నని రాసే పద్ధతి కానీ తెలిసినట్లు దాఖలాలు లేవు. తమాషా ఏమిటంటే వీరి తరువాత వచ్చిన యవనులు (గ్రీకులు), రోమకులు (రోమనులు) కూడా స్థాన బలం అనే కిటుకుని అవగాహన చేసుకున్నట్లు లేదు. "మూడడుగులు ముందుకేస్తే ఆరడుగులు వెనక్కి వేస్తావ్" అన్న సినిమా పాటలా, వీరిరువురు కొంచెం తిరోగమనం చేసి మరొక కొత్త పద్ధతిలో లెక్కించటం మొదలుపెట్టేరు.

యవనులు చేసినది ఏమిటంటే, వాళ్ళ భాషలో ఉన్న అక్షరాలనే అంకెలుగా కూడ వాడటం మొదలు పెట్టేరు. గ్రీకు భాషలో A, B, C, D లు అనడానికి బదులు, వాళ్ళ భాషలో ఆల్ఫా, బీటా, గామా, ... అంటారు కనుక ఆల్ఫా అంటే 1, బీటా అంటే 2, గామా అంటే 3, డెల్టా అంటే 4, ఎప్సిలాన్ అంటే 5,

ఈటా అంటే 8, తీటా అంటే 9, అయోటా అంటే 10, కప్పా అంటే 20... అలా ... అలా, వెళుతుంది వీరి పద్ధతి.

పాత గడియారాలు చూచిన వారికి రోమక పద్ధతి కొట్టిన పిండే. పుస్తకాలలోని పీఠికలలోని పేజీల్లోను, పురాతన భవనాల మీద కూడ రోమక పద్ధతి అంకెలు కనబడుతూనే ఉంటాయి. ఈ పద్ధతిలో 1, 5, 10 లకి I, V, X వాడటం అందరికీ సుపరిచితమే. తరవాత 50 కి L, 100 కి C, 500 కి D, 1000 కి M వాడతారు. ఇక్కడ C అన్నది "సెంటం" అన్న లేటిన్ మాటకి, M అన్నది "మిల్లి" అన్న మాటకి మొదటి అక్షరాలు.

ఈ పురాతన గాధలు అన్నీ ఎందుకులెండి. ఈ రోజులలో మనం వాడే 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అనే పది అంకెలని మన దేశంలో అయితే ఇంగ్లీషు అంకెలనీ, పాశ్చాత్య దేశాలలో అయితే "అరబ్బు" అంకెలని కొందరు, "హిందూ-అరబ్బు" అంకెలని కొందరూ అంటూరు గాని, నిజానికి ఇవి హిందూ అంకెలు. ఏ కారణం వల్లనో మనం మాత్రం మన పంచాంగాలలోను, పవిత్ర స్థలాలలోను, కారుల లైసెన్సు పలకల మీద ఈ హిందూ అంకెలని వాడటానికి ఇష్ట పడం; “తెలుగు” అంకెలు వాడతాం - అక్కడికి ఈ అరబ్బు అంకెలు అపవిత్రము, తెలుగు అంకెలు పవిత్రము అయినట్లు.

గమనించేరో లేదో, హిందూ అంకెలలో మొదటి అంకె సున్న, లేదా శూన్యం. ఈ సున్న అనే భావం మనం, మన దేశంలోనే కనిపెట్టమని నేను కొప్పెక్కి కూయక్కర లేదు. ఇది మన దేశపు సొంత భావం, సొంత మాటాను. పరాయి దేశాలలో, ముఖ్యంగా పాశ్చాత్య దేశాలలో, ఈ భావానికి సరిపడే మాట అప్పట్లో లేదు. తెలుగులో సాంకేతిక పదాలు లేక మనం ఇప్పుడు ఎలా తంటాలు పడుతున్నామో అలాగే పాశ్చాత్యులకి కూడ ఇబ్బంది వచ్చి ఉండుంటుంది. అందుకని వారు మన "శూన్య" ని తీసుకుని "సిఫిర్" గాను తదుపరి ఈ సిఫిర్ ని "సైఫర్" (cipher) గాను మార్చి వాళ్ళ భాషలో వాడేసుకోవటం మొదలు పెట్టేరండీ. ఇదే సైఫర్ మరో అడ్డు దారి వెంబడి వెళ్ళి "జెఫిరో" గాను, ఆ జెఫిరో కాస్తా "జీరో" (zero) గాను అయేయండీ.

ఒక్క సున్నని ఒక్కటీ కనిపెట్టి ఊరుకుని ఉంటే మన వాళ్ళకి ఇంత పేరు వచ్చేసి ఉండేది కాదేమో. సున్నతో పాటు స్థాన బలం సూత్రం అని మరొకటి కనిపెట్టి పారేసేరు మనవాళ్ళు. అప్పటి నుంచే ఒకట్ల స్థానం, పదుల స్థానం, వందల స్థానం, అనుకుంటూ అలా ఎంతవరకునైనా లెక్క పెట్టుకుంటూ వెళ్ళగలిగే స్థోమత మనకి వచ్చింది.

ఇప్పటి వరకు చెప్పిన ముఖ్యమైన అంశాలని ఒక సారి పునర్దర్శనం చేసుకుందాం. హిందువులు అంకెలకి కొంత సహజ బలం, కొంత స్థాన బలం ఉంటాయని అన్నారు. ఒక అంకె ఏ స్థానాన్నైనా ఆక్రమించవచ్చు. ప్రతీ స్థానానికి కొంత స్థాన బలం ఉంటుంది. ఈ స్థాన బలం కుడి నుండి ఎడమకు పదేసి ఇంతలు చొప్పున పెరుగుతు వెళ్ళిన యెడల దానిని "దశాంశ పద్ధతి" అంటారు. ఒక సంఖ్య యొక్క నిజమైన విలువ కనుక్కోవాలంటే ప్రతి స్థానంలోను ఉన్న అంకెని ఆ అంకె ఉన్న స్థాన బలంతో గుణించి, ఆయా లబ్దాలని కలపాలి. దశాంశ పద్ధతిలో ప్రతి స్థానం లోను పది వివిధమైన గుర్తులు గల అంకెలని వాడ వచ్చు.

దశాంశ పద్ధతి మనకి బాగా అలవాటు అయిన పద్ధతి కనుక నేను పైన క్రోడీకరించిన సంగ్రహం కొంచెం కృతకంగా కనిపించవచ్చు. కాని లెక్కించేటప్పుడు 0 నుండి 9 దాకా ఉన్న పది చిహ్నాలనే వాడి లెక్క పెట్టాలని ఎవరన్నారు? మన రెండు చేతులకి కలిపి పది వేళ్ళు ఉండబట్టి, మనం లెక్క పెట్టడానికి వేళ్ళు వాడతాము కాబట్టి, ఈ పదికి కొంత ప్రత్యేకత వచ్చి వుండవచ్చని విశ్వవ్యాప్తంగా ఉన్న అభిప్రాయం.

కాల గమనాన్ని కొలిచేటప్పుడు మనం దశాంశ పద్ధతిని వాడనేవాడం. చూడండి, అరవై సెకండ్లు ఒక నిమషం. అరవై నిమషాలు ఒక గంట. మొన్న మొన్నటి వరకు మూడు దమ్మిడీలు ఒక కాని, నాలుగు కానీలు ఒక అణా, నాలుగు అణాలు ఒక పావులా, నాలుగు పావులాలు ఒక రూపాయ. కనుక దశాంశ పద్ధతిలోనే లెక్క పెట్టాలని ఎవరూ శాసించ లేదు.

ఉదాహరణకి, అష్టాంశ పద్ధతిలో ఎనిమిదే ఎనిమిది అంకెలు ఉంటాయి. అవి, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ఈ పద్ధతిలో ఈ ఎనిమిది అంకెల తోటే లెక్కలన్నీ చేస్తాం. ఈ పద్ధతిలో 7 తరువాత ఏమిటి వస్తుంది? ఉన్న అంకెలన్నిటిని ఒక సారి లెక్క పెట్టడం అయిపోయింది కనుక, ఆ విషయం గుర్తు చేసుకుంటూ 1 వేసి, దాని తరువాత 0, 1, 2, అనుకుంటూ మళ్ళా 7 వరకు లెక్క పెడతాం. కనుక, అష్టాంశలో 7 తరువాత 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ఆ తరువాత 20, 21, ... వస్తాయి. ఇక్కడ వచ్చే 10 ని "పది" అనకూడదు. పది అనేది దశాంశ పద్ధతిలో వచ్చే మాట. అష్టాంశలో వచ్చే 10 దశాంశలో వచ్చే ఎనిమిదితో సమానం. అలాగే అష్టాంశలో వచ్చే 11 ని "పదకొండు" అనకూడదు; ఇది దశాంశలో వచ్చే తొమ్మిదితో సమానం. కనుక 10 అనే సంఖ్య కనిపించినప్పుడు అది "ఆటోమేటిక్" గా "పది" అయిపోదు కనుక ఆ సందర్భం అర్థం అయేవరకు దానిని "ఒకటీ సున్న" అనడమే మంచిది.

ఇదే విధంగా ద్వియాంశ పద్దతిని నిర్వచించవచ్చు. ద్వియాంశ పద్ధతిలో రెండే రెండు అంకెలు ఉన్నాయి. అవి - 0, 1. ఉన్న రెండు అంకెలని ఒక సారి లెక్క పెట్టడం అయిపోయింది కనుక ఒక 1 వేసి మళ్ళా లెక్క పెట్టాలి. కనుక 0, 1 తరువాత వచ్చేవి 10, 11. దశాంశ పద్ధతిలో 99 ఎలాంటిదో, ద్వియాంశలో 11 అలాంటిది. కనుక ద్వియాంశలో 11 తరువాత వచ్చే సంఖ్య 100 (ఇది 'నూరు" కాదు, 'వంద' కాదు. దీని పేరు ఒకటీ సున్నా సున్న.") ఈ పద్ధతిలోనే కంప్యూటర్లు లెక్కపెడతాయని ఈ రోజులలో సర్వులకు తెలిసిన విషయమే.

13. భారతీయ లెక్కింపు పద్ధతి

ఈ మధ్య ఒక స్నేహితురాలు పిలచి పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలని భారతీయ పద్ధతిలో ఏయే పేర్లతో పిలుస్తారని అడిగేరు. మంచి ప్రశ్నే!

ఈ రోజుల్లో ఏ పత్రిక తిరగేసి చూసినా ప్రభుత్వ, వ్యాపార రంగాలలో డబ్బు ఖర్చుల విషయం వచ్చేసరికి “ఆరువందల వేల కోట్లు,” “3,30,000 కోట్లు” మొదలైన మాటలు తరచు కనిపిస్తున్నాయి. నేను చిన్నప్పుడు ఇరవై తొమ్మిది తరువాత "ఇరవై పది, ఇరవై పదకొండు, ఇరవై పన్నెండు అని లెక్కట్టిస్తూ ఉంటే మా అన్నయ్య నా మూతి మీద వాత వేస్తానని బెదిరించేడు. ఇప్పుడు ఎవ్వరు, ఎవరి మూతి మీద ఏమి వెయ్యాలన్నది ప్రశ్న.

నేను చిన్నప్పుడు లెక్కలు చదువుకున్నప్పుడు లెక్కింపు పద్ధతి ఈ విధంగా వెళ్ళేది: ఒకట్లు (1), పదులు (10), వందలు (100), వేలు (1000), పదివేలు (10,000), లక్ష (1,00,000), పది లక్షలు (10,00,000), కోటి (1,00,00,000) పదికోట్లు (10,00,00,000). లెక్క ఇక్కడ ఆగిపోయేది; ఆ పైన లెక్క పెట్టవలసిన అవసరం అంతగా ఉండేది కాదు. ఆ రోజుల్లో లక్షాధికార్లు గొప్పవాళ్ళు; కోటీశ్వరులు నూటికో, కోటికో ఒకడు ఉండేవాడు. ఇప్పుడు లంచాలే కోట్ల మీద ఉన్నాయేమో అసలు ఖర్చులు గురించి మాట్లాడాలంటే ఇంకా పెద్ద సంఖ్యల అవసరం ఉంటుంది.

ప్రతీ విషయాన్నీ సైన్సు కోణం నుండి పరిశీలించి, కోడిగుడ్డుకి ఈకలు పీకి, అందరి చేతా అక్షతలు వేయించుకోవటం నాకు అలవాటయిపోయింది. పైన చూపెట్టిన సంఖ్యల పేర్లు చూడండి. ఒకటితో మొదలు పెట్టేం. తరువాత ఒకటి పక్క సున్న తగిలించిన వెంబడి వచ్చిన 10 ని "పది" అన్నాం. (ఈ 10 ని శాస్త్రంలో 10^1 అని రాస్తారు.) ఒకటి పక్క రెండు సున్నలు తగిలించిన తరువాత కొత్త పేరు తయారు చేసి "వంద" అన్నాం. (ఈ 100 ని శాస్త్రంలో 10^2 అని రాస్తారు.) ఒకటి తరువాత మూడు సున్నలు వస్తే మరొక కొత్త పేరు - "వెయ్యి" - పెట్టేం. (ఈ 1000 ని శాస్త్రంలో 10^3 అని రాస్తారు.) సున్నలు అలా వస్తూ ఉంటే కేశవ నామాలలా ఎన్ని పేర్లని పెడతాం? అందుకని వెయ్యి తరువాత సున్న చేర్చినప్పుడు కొత్త పేరు పెట్టకుండా "పది" అనే పూర్వ ప్రత్యయం తగిలించి "పది వేలు" (10,000 లేదా 10^4) అని పాత పేరునే మళ్ళా వాడేం. ఇప్పుడు మరొక సున్న తగిలించినప్పుడు "వంద వేలు" (ఈ వాడుక లేకపోలేదు) అనకుండా "లక్ష" అని కొత్త పేరు పెట్టేం. (1 లక్ష = 10^5). ఆ తరువాత "పది" చేర్చి "పది లక్షలు" అని

"లక్ష" ని తిరిగి వాడేం. (10 లక్షలు = 10^6). ఆ పైన మరొక కొత్త పేరు - కోటి - పెట్టేం. (1 కోటి = 10^7). తరువాత "పది కోట్లు" (= 10^8). ఈ బాణీ ప్రకారం నూరు కోట్లని "నూరు కోట్లు" (= 10^9) అనకుండా కొత్త పేరు పెట్టాలి. కాని నాకు తెలుసున్నంత వరకు "నూరు కోట్లు" కి, "వెయ్యి కోట్లు" (=10^{10}) కీ కొత్త పేర్లు వాడుకలో లేవు; “కోటి” నే పదేపదే వాడి వంద కోట్లు, వెయ్యి కోట్లు "పదివేల కోట్లు" (= 10^{11}) అనడం మొదలుపెట్టేం! (వంద కోట్లని నిఖర్వం అనిన్నీ, పదివేల కోట్లు" ని "అర్బుదం" అనిన్నీ   కొందరు అంటారు. కానీ ఈ పేర్లలో ఒక నిబద్ధత లేదు; ఒకొక్క పురాణంలో ఒకొక్క విధంగా ఉంటాయి.) ఇక్కడనుండి మళ్ళా బాణీ మారుతుంది. అర్బుదం తరువాత మరొక సున్న తగిలించినప్పుడు "మహా" అనే పూర్వ ప్రత్యయం చేర్చటం, రెండు సున్నలు చేర్చినప్పుడు కొత్త పేరు పెట్టటం చేసేరు, మన వాళ్ళు. ఈ పద్ధతిలో అర్బుదం తరువాత "పది అర్బుదాలు" కాకుండా "మహార్బుదం" (= 10^{12}) వస్తుంది. మరొక సున్న చేర్చినప్పుడు ఖర్వం (= 10^{13}), తరువాత మహా ఖర్వం (=10^{14}), పద్మం (=10^{15}), మహా పద్మం (=10^{16}) , మొదలైనవి. మన భారతీయ పద్ధతి వాడ దలుచుకుంటే 3,00,000 కోట్ల రూపాయలు అంటే $3x10^{12}$ లేదా 3 మహార్బుదాల రూపాయలు.

ఇప్పుడు ఒక ప్రశ్న, ఒక గమనిక.
ప్రశ్న: లక్ష రూపాయలు ఉన్నవాడిని లక్షాధికారి అంటాం కదా. కోటి ఉన్నవాడిని కోటీశ్వరుడు అంటాం. అర్బుదం రూపాయలు ఉన్నవాడిని ఏమనాలి? "అధికారి, ఈశ్వరుడు" కాకుండా మరొక ఉత్తర ప్రత్యయం కావాలనుకుంటే అర్బుదమంతుడు, ఖర్వమంతుడు, అని ఇప్పుడే అనేసుకుంటే ప్రత్యయాల కోసం తర్వాత వెతుక్కునే పనుండదు కదా!

గమనిక: తెలుగులో బహువచనం వాడినప్పుడు "లక్షలు," "కోట్లు," "మిలియన్లు," "బిలియన్లు" వగైరా అంటాం. కాని ఇంగ్లీషులోకి అనువాదం చేసినప్పుడు lakhs, crores, millions, billions అనరు; lakh, crore, million, billion అనే అంటారు. "నాలుగు లక్షల రూపాయలు" అన్న పదబంధాన్ని "four lakh rupees" అనే అనాలి. అలాగే "పది మిలియన్ల డాలర్లు" ని "ten million dollars" అనే అనాలి. కాని "లక్షల కొద్దీ లంచాలు ఇచ్చుకున్నారు" అన్నప్పుడు మాత్రం lakhs of rupees were spent in bribes అనాలి. "మిలియన్ల డాలర్లు వృధా చేసేరు" అన్న దానిని "millions of dollars were wasted" అని అనువదించాలి. ...అని నేను అనుకుంటున్నాను. ఇందులో తప్పుంటే తెలియజెయ్య గలరు.

ఇప్పుడు పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలని భారతీయ పద్ధతిలో ఏయే పేర్లతో పిలుస్తారో ఆ పేర్లు అన్ని ఇక్కడ ఇస్తున్నాను. (కుండలీకరణాలలో సంస్కృతం పేరు కాని, ఇంగ్లీషు/లేటిన్ పేరు కాని కూడ ఇచ్చేను.) ఈ పేర్లలో స్థాయీకరణ లేదు; సంప్రదించిన మూలాన్ని బట్టి సంఖ్య పేరులో కాని, విలువలో కానీ తేడా రావచ్చు.

ఈ దిగువ పేర్లని చదివేటప్పుడు వాటి బాణీని గమనించండి. ఈ బాణీ ప్రకారం "పది కోట్లు" తరువాత "వంద కోట్లు" అనకుండా కొత్త పేరు రావాలి, కాని రాలేదు. మాటవరసకి "వంద కోట్లు" ని “నిఖర్వం” అందాం. అప్పుడు మన సంఖ్యల వరస ఇలా ఉంటుంది: వెయ్యి, పది వేలు, లక్ష, పది లక్షలు, కోటి, పది కోట్లు, నిఖర్వం, మహా నిఖర్వం (అంటే పది నిఖర్వాలన్నమాట), అర్బుదం, మహార్బుదం (అంటే పది అర్బుదాలన్నమాట), వగైరా పేర్లు వస్తాయి. పదే పదే "పది" అన్న పూర్వ ప్రత్యయం చేర్చుతూ ఉంటే బాగుండదని "పది" కి బదులు "మాహా" వాడినట్లున్నారు.) ఈ "మహా" తో మహానిధి వరకు వెళ్ళి అక్కడ నుండి ఒక క్రమం అంటూ ఏదీ లేకుండా ఏవేవో పేర్లు వస్తాయి. (ఈ కింది జాబితాలో 10^8 అంటే 1 తరువాత 8 సున్నాలు అని అర్థం.)

1 = 10^0 = ఒకటి

10 = 10^1 = పది

100 = 10^2 = వంద (నూరు)

1000 = 10^3 = వెయ్యి (సహస్రం)

10,000 = 10^4 = పది వేలు (అయుతం)

1,00,000 = 10^5 = లక్ష (నియుతం)

10,00,000 = 10^6 = పది లక్షలు (ప్రయుతం, మిలియను)

1,00,00,000 = 10^7 = కోటి (పది మిలియనులు)

10,00,00,000 = 10^8 = పది కోట్లు (వంద మిలియనులు)

100,00,00,000 = 10^9 = వంద కోట్లు (బిలియను)

10,00,00,00,000 = 10^{10} = వెయ్యి కోట్లు (పది బిలియనులు)

1,00,00,00,00,000 =10^{11} = పది వేల కోట్లు (అర్బుదం, వంద బిలియనులు)

10^{12} = లక్ష కోట్లు (మహార్బుదం, ట్రిలియను)

10^{13} = పదిలక్షల కోట్లు (ఖర్వం, పది ట్రిలియనులు)

10^{14} = కోటి కోట్లు (మహా ఖర్వం, వంద ట్రిలియనులు)

10^{15} = పదికోట్ల కోట్లు (పద్మం, క్వాడ్రిలియను)

10^{16} = వందకోట్ల కోట్లు (మహా పద్మం, పది క్వాడ్రిలియనులు)

10^{17} = వెయ్యికోట్ల కోట్లు (క్షోణి, వంద క్వాడ్రిలియనులు)

10^{18} = పదివేలకోట్ల కోట్లు (మహా క్షోణి, క్వింటిలియను)

10^{19} = లక్షకోట్ల కోట్లు (శంఖం, పది క్వింటిలియనులు)

10^{20} = పదిలక్షలకోట్ల కోట్లు (మహా శంఖం, వంద క్వింటిలియనులు)

10^{21} = కోటికోట్ల కోట్లు (క్షితి, సెక్స్టిలియను)

10^{22} = మహా క్షితి (పది సెక్స్టిలియను)

10^{23} = క్షోభం (వంద సెక్స్టిలియనులు)

10^{24} = మహా క్షోభం (సెప్టిలియను)

10^{25} = నిధి (పది సెప్టిలియనులు)

10^{26} = మహా నిధి (వంద సెప్టిలియనులు)

10^{27} = పర్వతం (ఆక్టిలియను)

10^{28} = పరార్థం (పది ఆక్టిలియనులు)

10^{29} = అనంతం (వంద ఆక్టిలియనులు)

10^{30} = సాగరం (నొనిలియను)

10^{31} = అవ్యయం (పది నొనిలియనులు)

10^{32} = అచింత్యం (వంద నొనిలియనులు)

10^{33} = అమేయం (డెసిలియన్)

10^{34} = ??

10^{35} = భూరి (వంద డెసిలియన్లు)

10^{36} = మహా భూరి (అన్ డెసిలియన్)

10^{37} = వృందం (పది అన్ డెసిలియన్లు)

10^{38} = మహా వృందం

10^{39} = ?? (డూవో డెసిలియన్)

...

10^{55} = మహౌఘం (పదిసెప్టెన్ డెసిలియన్)

రావణాసురుడి సైన్యం ఒక మహౌఘం అని వాల్మీకి అంటాడు కనుక ఈ పేర్లు పూర్వం వాడుకలో ఉన్నట్లే మనం అనుకోవాలి.

14. అంతర్జాతీయ లెక్కింపు పద్ధతి

లెక్కించటంలో మన ప్రాచీన పద్ధతి, పాశ్చాత్య పద్ధతి ఎలా ఉంటాయో చూసేం కదా. ఈ రెండింటిలోనూ ఏ పద్ధతి మనం అవలంబిస్తే బాగుంటుందో చూద్దాం.

మన ప్రాచీన పద్ధతిలో కోటి వరకు మనకి అలవాటు అయిపోయింది కనుక వాడుకలో ఇబ్బంది ఉండదు. కోటి దాటిన తరువాత మనవాళ్ళు పడే ఇబ్బందులు చూడండి. ఈ మధ్య ఎక్కడో చదివేను, ఎవ్వరిదో బడ్జెటుట, 30 లక్షల కోట్లు! కొన్నాళ్ళు పోతే ఇది కోటి కోట్లు అవుతుంది. అటుపైన? మనం ఇబ్బందిలో పడక తప్పదు. ఎందుకంటే, పదివేలు తరువాత లక్ష వస్తుంది, పది లక్షలు తరువాత కోటి వస్తుంది. పది కోట్లు తరువాత ఏమిటి రావాలో ఎవ్వరూ అడగలేదు, అడిగినా ఎవ్వరికీ మూడొంతులు తెలియదు. పది కోట్లు తరువాత వచ్చేదానిని నిఖర్వం అనిన్నీ, పది నిఖర్వాల తరువాత వచ్చే దానిని అర్బుదం అనిన్నీ అంటారు. ఈ లెక్కలన్నీ గత అధ్యాయంలో చెప్పేను.

ఇప్పుడు పాశ్చాత్యులు వీటికి పేర్లు ఎలా పెట్టేరో చూద్దాం. ఒకటి, పది, వంద, వెయ్యి, పది వేలు, వంద వేలు, "పెద్ద వెయ్యి," ... ఇంతటితో ఆగుదాం.

మనం సంస్కృతాన్ని పట్టుకు వేల్లాడినట్లు పాశ్చాత్యులు లేటిన్ ని పట్టుకు వేళ్ళాడతారు. లేటిన్ లో మిల్లి (mille) అంటే వెయ్యి. ఇటలీ వాళ్ళు ఈ “మిల్లి” కి ఉత్తర ప్రత్యయం తగిలించి “మిలియోన్” (millione) అని పేరు పెట్టి "పెద్ద వెయ్యి" ని “మిలియోన్” అనేవారు. అదే క్రమేపీ మిలియను అయింది. కనుక ఇప్పుడు పాశ్చాత్యుల లెక్క - one, ten, hundred, thousand, ten thousand, hundred thousand, million,.. ఇలా వెళ్ళటం మొదలు పెట్టింది.

సా. శ. 1484 లో N. Chuquet అనే ఆసామీ billion, trillion, quadrillion, quintillion, sextillion, septillion, octillion, nonillion అనే మాటలని తయారు చేసి వాడమని సలహా ఇచ్చేడు. ఈ సలహా 1520 లో అచ్చు లోకి ఎక్కింది. ఈ సంఖ్యల పేర్లలో వచ్చే పూర్వ ప్రత్యయాల బాణీని చూడండి.

bi (2), tri (3), quadr (4), quint (5), sext (6), sept (7), oct (8), non (9)

లేటిన్ తో కాస్తో, కూస్తో పరిచయం ఉన్న వాళ్ళకి ఈ పూర్వ ప్రత్యయాల అర్థం ఇట్టే తెలుస్తుంది. అది తెలియని వారి సౌకర్యం కొరకు వాటి విలువలు కుండలీకరణాలలో చూపెట్టను.

1 బ్రిటిష్ పద్ధతి

ఈ పద్ధతి ప్రవేశ పెట్టినవాళ్ళ ఉద్దేశ్యం ఏమిటంటే -

- మిలియను అంటే 1,000,000: (మిలియనుని ఒకసారి వెయ్యటం)
- బిలియను అంటే, $(1,000,000)^2$: మిలియనుని (బి) రెండు సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 12 సున్నలు)
- ట్రిలియను, అంటే $(1,000,000)^3$: మిలియనుని (ట్రై) మూడు సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 18 సున్నలు)
- .....
- నోనిలియను, అంటే $(1,000,000)^9$: మిలియనుని (నో) తొమ్మిది సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 6 x 9 = 54 సున్నలు)
- డెసిలియను, అంటే $(1,000,000)^{10}$: మిలియనుని (డెసి) పది సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 6 x 10 = 60 సున్నలు)
- విగింటిలియను, అంటే $(1,000,000)^{20}$: మిలియనుని ఇరవై సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 6 x 20 = 120 సున్నలు)
- సెంటిలియను, అంటే $(1,000,000)^{100}$: మిలియనుని వంద సార్లు వేసి గుణించటం (అనగా 1 తరువాత 6 x 100 = 600 సున్నలు)

ఈ పద్ధతి బ్రిటన్ లోను, వారి సామ్రాజ్యపు అవశేషాలు ఉన్న దేశాలలోనూ వాడుకలో ఉంది. ఇది ఎందుకు తర్క బద్ధంగా ఉందంటే, సంఖ్య పేరు చెప్పగానే అందులో 1 తరువాత ఎన్ని సున్నలు వస్తాయో, పైన నేను లెక్క కట్టినట్లు, సులభంగా చెప్పవచ్చు.

2 అమెరికా పద్ధతి

కాని మనకి ఈ అమెరికావాళ్లు దాపురించేరు కదా. వీళ్లు   అన్నది ఏమిటంటే, వెయ్యి (1000) ని మూలంగా తీసుకుని దానిని 2 సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చినదానిని "మిలియను" అనమన్నారు. వెయ్యిని మూడు సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చినదానిని బిలియను అనిన్నీ, అలా ఈ దిగువ చూపిన విధంగా అనమనీ ఆదేశించేరు.

- 10, పది
- 100, వంద
- 1000, వెయ్యి
- $1000^2 = 10^6$, మిలియను
- $1000^3 = 10^9$, బిలియను
- $1000^4 = 10^{12}$,ట్రిలియను
- $1000^5 = 10^{15}$, క్వాడ్రిలియను
- $1000^6 = 10^{18}$, క్వింటిలియను
- ....
- $1000^{11}? = 10^{33}$, డెసిలియను
- $1000^{22} = 10^{66}$, విగింటిలియను
- $1000^? = 10^{100}$, గూగోల్
- $1000^? = 10^{\text{గూగోల్}}$, గూగోల్ప్లెక్స్

మొదట చూపెట్టిన "బ్రిటిష్" పద్ధతి ప్రకారం పేరును బట్టి సంఖ్యలో ఎన్ని సున్నలుంటాయో గ్రహించటం తేలిక. అమెరికన్ పద్ధతిలో ఆ సుళువు లేదు. పైన చూపెట్టిన జాబితా కంఠస్థం చెయ్యటం తప్ప మరొక మార్గం లేదు. కాని అమెరికావాడి జబ్బ శక్తి వల్ల ఆ పద్ధతే ఎక్కువ ఆచరణలో ఉంది.

మొన్న మొన్నటి వరకూ ఇంతింత పెద్ద సంఖ్యలని వాడ వలసిన అవసరం ఉండేది కాదు కనుక పేచీ లేక పోయింది. ఇప్పుడు సైన్సు ఏ మాత్రం చదువుకున్నా పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలు, చిన్న చిన్న సంఖ్యలు ఎక్కువ తారసపడుతూ ఉంటాయి. సైన్సుని ఏకచ్ఛత్రాధిపత్యంతో ఏలుతూన్నది అమెరికా కనుక మనం కూడా నిఖర్వాలు, అర్బుదాలకీ స్వస్తి చెప్పి ఈ అమెరికా పద్ధతే అవలంబిస్తే మంచిది. ఎలాగూ సైన్సుకి మెట్రిక్ పద్ధతి వాడుతున్నాం కదా. అలాగే ఇదీను.

ఇంతింత సంఖ్యల అవసరం ఈ ఆధునిక యుగంలో ఎలా వస్తోందో చూద్దాం. ఉదాహరణకి ఈ విశ్వములో 200 బిలియన్ల (200,000,000,000 = 2 x 10^11 = 2 x 10^{11}) క్షీరసాగరాలు ఉన్నాయని ఒక అంచనా ఉంది. ప్రతి క్షీరసాగరం లోను నూరు బిలియన్ల (100,000,000,000 = 10^11= 10^{11}) నక్షత్రాలు ఉన్నాయిట. కనుక ఈ విశ్వములో 2 x 10^22 = 2 x 10^{22} నక్షత్రాలు ఉన్నాయన్నమాట. ఈ రకంగా లెక్కలు వేసుకుంటూ ఒక వ్యక్తి ఈ విశ్వములో 10^80 = 10^{80} అణువులు (atoms) ఉన్నాయని ఉజ్జాయింపు లెక్క వేసేడు!

15. పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల అవసరం

పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలకి పేర్లు పెట్టటం గురించి కొంతవరకు విచారించేం. ఇప్పుడు అంత పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల అవసరం ఎప్పుడు, ఎక్కడ, ఎలా వస్తుందో చూద్దాం.

సా. శ. 1945 ప్రాంతాలలో మా పెద్దన్నయ్య పెళ్లి జరిగింది. ఆ పెళ్లిలో కట్నం నూట పదహార్లు. నూరు అనేది నా ఊహకి అందే సంఖ్యే.

సా. శ. 1950 దశకం చివరి రోజుల్లో, నేను ఇంజనీరింగు కాలేజీలో ఉన్నప్పుడు, నా సహాధ్యాయుల్లో కొందరు లక్ష రూపాయలు కట్నం తీసుకుని పెళ్లి చేసుకున్నారని విన్నప్పుడు లక్ష నా ఊహకి అందని సంఖ్య.

సా. శ. 1992 లో ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో పుగాకు, సారా వంటి సామగ్రుల మీద వేసే పన్నుల వల్ల ప్రభుత్వానికి వచ్చే ఆదాయం 839 కోట్ల రూపాయలని ఎక్కడో చదివేను. ఆ రోజుల్లో లక్ష ఊహించగలిగే వాడిని కాని 839 కోట్లు ఊహించలేకపోయేవాడిని!.

సా. శ. 2019 లో భారతదేశపు బడ్జెట్ 30 లక్షల కోట్లు అని విన్నప్పుడు ఆ సంఖ్యని ఉహించలేక పోవడమే కాకుండా మన దేశపు సంఖ్యామానాన్ని మెట్రిక్ పద్ధతి లోకి త్వరలో మార్చకపోతే పెద్ద గందరగోళమే వచ్చి పడుతుందని ఆవేదన పడ్డాను.

ఇరవై ఒకటవ శతాబ్దపు మొదటి రోజుల్లో భారత దేశం జనాభా ఒక బిలియను (100 కోట్లు) దాటిందని చెబుతున్నారు. గణిత పరిభాషలో బిలియనుని రాయవలసి వచ్చినప్పుడు ఒకటి పక్క తొమ్మిది సున్నలు చుడితే బోలెడు స్థలం ఆక్రమిస్తుంది కనుక, క్లుప్తంగా 10 అనే సంఖ్య వేసి, దాని పక్కగానూ, కొంచెం నెత్తిమీదకి వచ్చేలా 9 వేస్తారు. ఈ పద్ధతి ఉపయోగం త్వరలోనే చదువరులకి అర్థం అవుతుంది. ఇక్కడ రాత సౌలభ్యం కోసం 10 వేసి, దాని పక్క హంసపాదు వేసి, దాని పక్క 9 వేసి, ఇలా – 10^9 – చూపిస్తాను. దీనినే 10^9 అని కూడా రాస్తారు.

ఈ భూమి మీద జీవి పుట్టి నాలుగు బిలియను సంవత్సరాలు అయిందిట. ఈ రోజు (సా. శ. 2019) నాటికి భూలోకపు జనాభా 7 బిలియనులు – అంటే, 7,000,000,000 - దాటింది. ఈ విశ్వములో 2 x 10^22 = 2 x 10^{22} నక్షత్రాలు ఉండుంటాయని ఒక అంచనా వేసాము కదా! ఈ సంఖ్యని రాయాలంటే 2 పక్కన 22 సున్నలు చుట్టాలి. మనం అలా చుట్టినా చదివేవాడు ఎన్ని సున్నలు ఉన్నాయో లెక్కపెట్టుకోవాలి. అందుకని ఈ సంఖ్యని 10^22 అని కానీ 2 x 10^{22} అని కానీ రాయమని నేను సలహా ఇస్తున్నాను. ఈ రకం రాతని ఘాతీయ పద్ధతి (exponential notation) అంటారు.

మానవ శరీరంలో ఉరమరగా ట్రిలియను – అనగా 1,000,000,000,000 – జీవకణాలు ఉన్నాయిట. ఈ ట్రిలియనుని మన ప్రాచీనులు న్యర్బుదం అన్నారు.

సా. శ. 2012 లో అమెరికా బడ్జెట్ మూడున్నర ట్రిలియను డాలర్లు. ఈ సంఖ్యని ఊహించుకోటానికి చిన్న చిటకా చెబుతాను. మూడున్నర ట్రిలియను డాలరు నోట్లు తీసుకుని వాటిని రెండు దోంతిలుగా పేర్చితే, అవి ఇక్కడ నుండి చంద్రుడిని చేరుకుంటాయి.

పది ట్రిలియను కిలోమీటర్లు దూరాన్ని ఆధునిక యుగంలో "జ్యోతిర్వర్షం" లేదా "కాంతి సంవత్సరం" అంటున్నారు. అంటే, ఒక సంవత్సరంలో కాంతి ఉరమరగా పది ట్రిలియను కిలోమీటర్లు ప్రయాణం చేస్తుంది.

ఇటు పైన ఇంతింత పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలని ఉపమానాల సహాయంతో కూడ ఊహించుకోవటం కష్టం. అందుకనే కాబోలు 1 తరువాత 33 సున్నలు చుట్టగా వచ్చే సంఖ్యని మనవాళ్లు "అచింత్యం" అన్నారు – అంటే ఊహకి అందనిది అని కదా అర్థం.

ఈ అధునాతన జీవితంలో ఇంతకంటె పెద్ద సంఖ్యలతో పని ఉంది. అటువంటప్పుడు "ఊహకి అందనిది" అని పెదవి విరిచేస్తే ఎలా? మానవ ప్రయత్నం చెయ్యాలి కదా! ఉదాహరణకి ఒక అరఠావు కాగితం తీసుకుని దాని మీద ఈ చివర నుండి ఆ చివరకి ఒక తిన్నని గీత గీసేమనుకుందాం. ఈ గీతకి మొదట సున్న అనిన్నీ చివర బిలియను అనిన్నీ రాద్దాం. అంటే, గీత పొడుగు ఒక బిలియను "అంగుళాలు" అని భాష్యం చెప్పుకోవచ్చు. ఇప్పుడు చదువరులకి ఒక చిన్న ప్రశ్న. ఈ గీత మీద మొదటి నుండి మిలియను అంగుళాల దూరంలో ఒక చుక్క పెట్టండి చూద్దాం. తరువాయి చదవకుండా ఈ పని ముందు చెయ్యండి.

ఈ ప్రశ్న వేసినప్పుడు చాల మంది గీత మధ్యలో చుక్క పెడతారు. నిజానికి మనం పెట్టే చుక్క సున్నకి అత్యంత సమీపంగా ఉంటుంది. ఎంత దగ్గరో చెబుతాను, చదవండి. ఇప్పుడు ఈ గీతని వెయ్యి సమభాగాలు చేస్తూ వెయ్యి చుక్కలు పెట్టేరని అనుకుందాం. అప్పుడు సున్న నుండి మొదటి చుక్కకి దూరం మిలియను. రెండో చుక్క దూరం రెండు మిలియన్లు. మూడో చుక్కకి దూరం మూడు మిలియన్లు. …వెయ్యో చుక్క దూరం వెయ్యి మిలియన్లు, లేదా బిలియను.

ఈ సందర్భంలో మరొక ఉదాహరణ. ఒక పాత గోల్డ్‌స్పాట్ సీసా, రోడ్డు పక్క మురుగు కాలవలో పడుందని అనుకుందాం. సీసా బాగుంది కదా అని ఉదయం 11 గంటలకి రెండు బేక్టీరియంలు సీసాలో దూరి కాపురం పెట్టేయని అనుకుందాం. ఈ సూక్ష్మజీవుల పునరోత్పత్తి నిమిషానికి ఒకసారి చొప్పున రెట్టింపు అవుతోందని కూడ అనుకుందాం. మధ్యాహ్నం 12 అయేసరికల్లా ఆ సీసాలో "అడుగు పెట్టలేనంత దట్టంగా, పిప్పళ్ల బస్తాలా, సూక్ష్మజీవులతో కిటకిటలాడిపోతోందని అనుకుందాం. ఇలా జనాభా పెరిగిపోతే మన సూక్ష్మజీవులకి తినటాని తిండి ఉండదు, పీల్చటానికి గాలి ఉండదు. పైపెచ్చు వాటి మలమూత్రాదులలోనే అవి కొట్టుమిట్టాడి సర్వనాశనం అయిపోయే ప్రమాదం దాపురిస్తుంది. ఇప్పుడు నేను అడగబోయే ప్రశ్న ఇది. సావధానంగా చదివి సమాధానం చెప్పండి. మన సూక్ష్మజీవులకి ఆలోచనా శక్తి, ఇంగిత జ్ఞానం ఉంటే ఏ వేళకి అవి వాటికి ఆసన్నమయే ప్రమాదాన్ని పసికట్టగలవు?

మీలో కుశాగ్రబుద్ధులు ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం తేలికగానే చెప్పగలరు. నిమిషానికి జనాభా రెట్టింపు అవుతోంది కనుక 11 గంటల 59 నిమిషాలకి సీసా సగం నిండితే 12 గంటలకి పూర్తిగా నిండుతుంది. కనుక 11 గంటల 58 నిమిషాలకి నాలుగో వంతు నిండుతుంది. కనీసం అప్పటికైనా బుద్ధి తెచ్చుకుని తరుణోపాయం ఆలోచించకపోతే సీసాలో ఉన్న సూక్ష్మజీవులన్నీ హరీమనిపోతాయి.

మన భూలోకం పరిస్థితీ ఇలాగే ఉంది. జనాబా పెరుగుదల ఒక్కటే కాదు. కాలుష్యం పెరిగిపోతోంది. వాతావరణపు తాపోగ్రత పెరిగిపోతోంది.

జనాబా సంగతే చూద్దాం. ప్రతి 30 సంవత్సరాలకి మన భూలోకపు జనాభా రెట్టింపు అవుతోంది. అంటే సా. శ. 2050 లోపుగానే మన జనాబా రెట్టింపయి 14 బిలియన్లు దాటిపోతుంది. ప్రపంచం

మాట దేవుడెరుగు. మన పవిత్ర భారతదేశం జనాభా రెండు బిలియన్లు దాటిపోతే తలదాచుకుందుకి చోటు కూడ ఉండదు.

ఒక్క జనాభాయే కాదు, ఇలా పెరిగేవి ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. ఈ ప్రపంచంలో పాపం కూడ ఇలాగే పెరిగిపోతోందని మా నాన్నగారు అనేవారు. ముందు ఒక వెధవ పని చేస్తాం. ఎక్కడ బయట పడిపోతామో అని దానిని కప్పెట్టటానికి రెండు అబద్ధాలు చెబుతాం. ఎక్కడ పట్టుబడిపోతామో మరో నాలుగు కంతిరీ పనులు చెయ్యాలి. ఇలా పాపం పెరిగిపోతుంది.

విశ్వం అంచులని చేరుకున్న తరువాత ఇంకా పెద్ద సంఖ్యల అవసరం ఏమి ఉంటుంది? కాని ఎందుకో మన పూర్వులు ఇంకా పెద్ద సంఖ్యలని ఊహించి వాటికి పేర్లు పెట్టేరు. అవ్యయం అంటే 10^30, అచింత్యం అంటే 10^31, అమేయం అంటే 10^32, భూరి అంటే 10^33, మహాభూరి అంటే 10^34 అనీ పేర్లు ఉన్నాయి. రామ-రావణ యుద్ధంలో సైన్యాలు ఎంత పెద్దవో చెప్పటానికి వాల్మీకి మహౌఘం అనే మాట వాడేడు ట. మహౌఘం అంటే 10^55. ఇంతింత పెద్ద సంఖ్యలని ఊహించి వాటికి పేర్లు పెట్టాలనే యావ కల మన పూర్వులకి జోహార్లు.

16. సంఖ్యలలో రకాలు: సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణ సంఖ్యలు

రకరకాల మనుష్యులు ఉన్నట్లే అంకెలలో రకరకాలు ఉన్నాయి, ఈ రకాలని ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

తెలుగులో అంకెలు, సంఖ్యలు అన్న రెండు మాటలు ఉండటం ఉన్నాయి కాని, వీటి వాడకంలో అంతగా నిర్దిష్టత ఉన్నట్లు తోచదు. సున్న నుండి తొమ్మిది వరకు ఉన్న వాటిని అంకెలు అనాలనీ, ఆ పై వాటిని సంఖ్యలు అనాలనీ ఒక నియమం ఉండటం ఉంది కాని, అన్ని నియమాలలాగే ఈ నియమాన్ని అప్పుడప్పుడు ఉల్లంఘించక తప్పదు. మరొక కోణం నుండి చెప్పాలంటే ఇంగ్లీషులో "నూమరల్" (numeral) అనే మాటని అంకె అనీ, "నంబర్" (number) అనే మాటని సంఖ్య అనీ తెలిగించ వచ్చు.

సంఖ్యలకి రాతలో వేసే గురుతులే "అంకెలు" అనే నిర్వచనం మరొకటి ఉందిట. ఈ లెక్కని రోమన్ అంకెలు, గ్రీకు అంకెలు, హిందూ అంకెలు మొదలైనవి సంఖ్యలకి వాడే రకరకాల గుర్తులు.

మన మనుగడకి భాష నేర్పరితనం ఎంత ముఖ్యమో లెక్కలలో నేర్పరితనం కూడ అంతే ముఖ్యం. మనం ఏ విషయమైనా ఆలోచించేటప్పుడు ఆ ఆలోచనకి రూపం దిద్దటానికి మన మనోఫలకం మీద మాటలు పేర్చి చూసుకుంటాం. అదే విధంగా ఏదైనా నిశ్చయం చెయ్యవలసి వచ్చినప్పుడు, అసంకల్పంగానైనా సరే, ఆ నిశ్చయం చెయ్యటం వల్ల కలిగే లాభనష్టాలు ఏమిటో మనస్సులో లెక్కకట్టి, బేరీజ వేసి చూసుకుంటాం.

రెండు వస్తువులని చూపిస్తే ఏది పెద్దదో చెప్పగలగటం, కైవారాన్ని బట్టి వస్తువులని ఒక క్రమంలో అమర్చటం, పెంపుడు జంతువులని లెక్కపెట్టి చూసుకోవటం, ఆస్తులు పంచుకోవటం, మొదలైన చర్యలు బతుకుకి నిత్యావసరాలు కదా. ఈ రకం గణన పద్ధతులనే మనం అంకగణితం (arithmetic) అంటాం.

లెక్క పెట్టటం సంగతే చూద్దాం. లెక్క పెట్టటానికి 'అంకె' అనే పరిజ్ఞానం కావాలి. ఈ అంకె అనే భావాన్ని బహిర్గతం చెయ్యటానికి ఒక మాట కావాలి. ఈ మాటని రాయటానికి ఒక సంకేతం కావాలి. ఈ మాటలే ఒకటి, రెండు, మూడు,.., మొదలైనవి. ఈ సంకేతాలు 1, 2, 3, …, మొదలగునవి.

భాషని బట్టి మాట మారుతుంది. దేశ, కాల, పరిస్థితులకి అనుకూలంగా సంకేతాలు మారతాయి. కాని భావం ఒకటే.

ఇప్పుడు, ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఎక్కువ వాడుకలో ఉన్న సంకేతాలు 1, 2, 3, …, మొదలైనవి కనుక ఇక్కడ వీటినే వాడదాం. ఈ అంకెలు, సంఖ్యలు, చూడటానికి ఒకేలా కనిపించినా, వీటిల్లో ఎన్నో సూక్ష్మమైన మెలికలు ఉన్నాయి. అంకెలలో రకరకాల అంకెలు ఉన్నాయి. అవేమిటో చూద్దాం.

1 సహజ సంఖ్యలు (Natural Numbers)

చరిత్రని దృష్టిలో పెట్టుకు చూస్తే మొట్టమొదట లెక్క పెట్టుకోటానికి పనికొచ్చే అంకెలు మనకి తారసపడి ఉంటాయి. వీటిని మనం 1, 2, 3,…, అని రాస్తాం. గణిత పరిభాషలో చెప్పాలంటే - ఒకటి నుండి మొదలు పెట్టి 1, 2, 3,… అనుకుంటూ, అలా లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలని “సహజ సంఖ్యలు” అంటారు. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే, 1, 2, 3, 4, 5, 6,……అలా విసుగు, విరామం లేకుండా లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే వచ్చే అనుక్రమం (sequence) లోని సంఖ్యలే సహజ సంఖ్యలు (natural numbers). ఈ సహజ సంఖ్యలనే లెక్కింపు సంఖ్యలు లేదా గణన సంఖ్యలు (counting numbers) అని కూడ అంటారు.

ఈ సహజ సంఖ్యల లక్షణాలు చూద్దాం. రెండు సహజ సంఖ్యలని కూడగా వచ్చే మొత్తం మరొక సహజ సంఖ్య అయి తీరుతుంది. ఉదాహరణకి 3 నీ 5 నీ కూడితే 8 వస్తుంది. ఇక్కడ 3, 5 సహజ సంఖ్యలు, వాటి మొత్తం కూడ సహజ సంఖ్యే! గణితశాస్త్ర వేత్తలకి ఈ రకం లక్షణం అంటే ఎంతో ఇష్టం. ఇది ఎందుకో చూద్దాం. ఇద్దరు మనుష్యులు కలుసుకుని పెళ్లి చేసుకున్నారని అనుకుందాం. ఈ కలయిక వల్ల వారికో పిల్ల పుడితే, ఆ పిల్ల మనిషి పిల్లయితే అది సహజంగా ఉంటుంది. వాళ్లకి ఏ కుక్క పిల్లో పుడితే అది అసహజం. అదే విధంగా రెండు సహజ సంఖ్యలని కలిపినప్పుడు మరొక సహజ సంఖ్య వస్తే ‘అది సహజం,’ అని గమనించి, సంతృప్తిపడతారు - లెక్కల ప్రపంచంలో విహరించే వ్యక్తులు. కనుక ఈ లక్షణం గణితంలో చాల ముఖ్యమైనది. ముఖ్యమైన లక్షణం కనబడ్డప్పుడు దానికో పేరు పెడితే బాగుంటుంది కదా. ఈ లక్షణాన్ని ఇంగ్లీషులో “క్లోషర్” (closure) అంటారు. దీన్ని మనం తెలుగులో “సంవృతం” అందాం. ఒక భావాన్ని ఒక మాటతో ముడి పెట్టేము కనుక ఇప్పుడు మనం గమనించిన భావాన్ని ఒక సూత్రంలా ప్రవచించవచ్చు: “సంకలనం చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం ప్రదర్శిస్తాయి.” (Natural numbers are closed

under addition.) అంటే, రెండు సహజ సంఖ్యలని కలిపినప్పుడు వచ్చే సమాధానం కూడ సహజ సంఖ్యే!

పై సూత్రం చదవగానే కొంచెం, వీసమెత్తు, కుతూహలం ఉన్న వ్యక్తికి చిన్న సందేహం వస్తుంది: వ్యవకలనం లేదా తీసివేతలు చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం చూపుతాయా? ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం వెతకటం కష్టం కాదు. ఉదాహరణకి 7 లోంచి 5 తీసివేస్తే 2 వచ్చింది. ఇక్కడ 7, 5, 2 సహజ సంఖ్యలే. కాని 5 లోంచి 7 తీసివేస్తే ఋణ సంఖ్య వచ్చింది. (ఋణ సంఖ్య అంటే ఏమిటో రాబోయే పేరాలో చెబుతాను.) ఈ ఋణ సంఖ్యని రాసేటప్పుడు - 2 అని రాస్తాం. ఈ - 2 సహజ సంఖ్యల జాబితాలో లేదు. మరొక ఉదాహరణ. సహజ సంఖ్య అయిన 5 లోంచి మరొక 5 తీసివేస్తే 0 వచ్చింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో మనకి తారసపడ్డ 0, - 2 సహజ సంఖ్యలు కావు; నిర్వచనం ప్రకారం సహజ సంఖ్యలు 1 తో మొదలవుతాయి. అంటే, నిర్వచనం ప్రకారం ధన పూర్ణ సంఖ్యలే సహజ సంఖ్యలు; ఋణ సంఖ్యలు, సున్న సహజ సంఖ్యలు కావు. కనుక వ్యవకలనం చేసేటప్పుడు సహజ సంఖ్యలకి సంవృత లక్షణం లేదు.

సంఖ్యలన్న తరువాత వాటితో కనీసం కూడికలు, తీసివేతలు చెయ్యలేకపోతే వాటి ప్రయోజనం ఏమిటి? నెత్తిమీద పెట్టుకుని ఊరేగటానికా? మన దైనందిన వ్యవహారాలకి సహజ సంఖ్యలు ఒక్కటీ ఉంటే సరిపోవు; వాటితో పాటు, సున్న, ఋణ సంఖ్యలు కూడ ఉండాలి. అందుకని ధన పూర్ణాంకాలని, సున్నని, ఋణ పూర్ణాంకాలనీ గుత్త గుచ్చి వాటికి పూర్ణాంకాలు (integers or whole numbers) అని పేరు పెట్టి పిలవమన్నారు. మనం అలాగే పిలుస్తున్నాం. మన అవసరాలకి సహజ సంఖ్యల కంటె పూర్ణాంకాలు (లేదా, పూర్ణ సంఖ్యలు) మెరుగన్నారు. ఇక్కడ గమనించవలసినది ఏమిటంటే పూర్ణ సంఖ్యలలో ఒక భాగం పేరు సహజ సంఖ్యలు.

2 ధన, ఋణ సంఖ్యలు (Positive and Negative Numbers)

లెక్కపెట్టేటప్పుడు సున్న నుండి “ముందుకి” వెళితే వచ్చేవి ధన సంఖ్యలు అనిన్నీ, “వెనక్కి” వెళితే వచ్చేవి ఋణ సంఖ్యలు అనిన్నీ అంటారు. మనకి వచ్చే జీతపు రాళ్లు 10 అయితే దాన్ని ‘ధన 10’ అని కాని, ‘ప్లస్ 10’ అని కాని, ‘+10’ అని కాని అంటాం. అదే విధంగా మనకి పది రూపాయలు అప్పు ఉంటే దాన్ని ‘ఋణ 10’ అని కాని, ‘మైనస్ 10’ అని కాని. ‘-10’ అని కాని అనాలి. కనుక ‘ధన,’ ‘ఋణ’ అనే భావాలు లేదా ‘ఆదాయం,’ ‘వ్యయం’ అనే భావాలు చర్చించ వలసిన సమయాల్లో

సహజ సంఖ్యలు అనే భావం సరిపోదు; పూర్ణాంకాలు (లేదా, పూర్ణసంఖ్యలు) అనే కొత్త భావం అవసరం వస్తుంది.

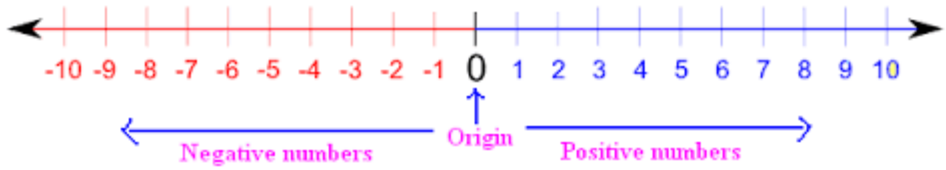
3 పూర్ణాంకాలు లేదా పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers)

సున్న నుండి మొదలు పెట్టి అలా ముందుకి లెక్కపెట్టుకుంటూ పోతే నిర్విరామంగా వచ్చే 0, 1, 2, 3, … వంటి ధన సంఖ్యలు, వెనక్కి పోతే వచ్చే -1, -2, -3, … వంటి ఋణ సంఖ్యలూ, అన్నింటిని కలిపి పూర్ణ సంఖ్యలు (integers) అని అంటారు. కనుక ….-3, -2, -1, 0, 1, 2,3,… వగైరాలన్నీ పూర్ణాంకాలు. వీటిల్లో -1, -2, -3,… వగైరాలు ఋణ పూర్ణాంకాలు; సున్న (0) ని కూడ ధన పూర్ణాంకం అనడం ఆనవాయితీగా వస్తూన్న ఆచారం కనుక 0,1, 2, 3, … వగైరాలు ధన పూర్ణాంకాలు.

ఇప్పుడు మనం ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యలని తీసుకుని కలిపినా, తీసివేసినా, హెచ్చవేసినా వచ్చే సమాధానం మరొక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. మచ్చుకి 5 కి 2 ని కలపగా వచ్చిన 7 మరొక పూర్ణ సంఖ్య; 2 నుండి 5 ని తీసివెయ్యగా వచ్చిన -3 కూడ పూర్ణ సంఖ్యే; 5 ని 2 చేత గుణించగా వచ్చిన 10 కూడ పూర్ణ సంఖ్యే. అంటే, సంకలన, వ్యవకలన, గుణకారాలు చేసేటప్పుడు పూర్ణ సంఖ్యలు సంవృత లక్షణాన్ని ప్రదర్శిస్తాయి.

కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలేనా (హెచ్చవేతలేనా) మనం చేసే గణిత ప్రక్రియలు? ఆస్తుల పంపకాల సమయంలో భాగారాలు కూడ చెయ్యాలి కదా. ఉదాహరణకి -34 ని 2 చేత భాగించినప్పుడు -17 వచ్చింది. ఇందులో ఇబ్బందేమీ లేదు; ఒక పూర్ణ సంఖ్యని మరొక పూర్ణ సంఖ్యతో భాగించినప్పుడు మరొక పూర్ణ సంఖ్య సమాధానంగా వచ్చింది. కాని ఈ -17 ని మళ్లా 2 చేత భాగిస్తే సమాధానంగా పూర్ణ సంఖ్య రాలేదు. కనుక భాగారాలు చేసేటప్పుడు పూర్ణసంఖ్యలు సంవృతాలు కావు. ఈ ఇబ్బంది నుండి గట్టెక్కాలంటే మనం మరొక రకం సంఖ్యలని సృష్టించుకోవాలి. అవే భిన్న సంఖ్యలు లేదా భిన్నాలు. వీటి సంగతి తరువాత చూద్దాం.

సహజ సంఖ్యలని, పూర్ణ సంఖ్యలని సంఖ్యా రేఖ (number line) మీద చుక్కలు వేసి చూపవచ్చు (బొమ్మ 1 చూడండి). ఈ సంఖ్యా రేఖ తరచు వాడుతాము కాబట్టి దీనితో పరిచయం పెంచుకోవడం మంచిది.



బొమ్మ 1. సంఖ్యా రేఖ మీద పూర్ణ సంఖ్యల ఉనికి.

17. సంఖ్యలలో రకాలు: నిష్ప, అనిష్ప, లోకోత్తర సంఖ్యలు

భిన్నాన్ని ఇంగ్లీషులో `ఫ్రేక్షన్` (fraction) అంటారు. తెలుగులో కాని, సంస్కృతంలో కాని `భిన్నం` అంటే 'మామూలుగా కాకుండా మరొక విధంగా' అని అర్థం; `భాగం` అనే సూచనే లేదు. కాని ఇంగ్లీషులో మాత్రం `ఫ్రేక్షన్` అంటే భాగం అనే అర్థం. తెలుగులో "భిన్నాలు" అంటే "మరొక రకమైన సంఖ్యలు" అనే అర్థం స్ఫురిస్తుంది కాని ఇక్కడ మనం "భాగం" అనే అర్థాన్నే తీసుకుందాం. ఏది ఏమయినా భిన్నం అంటే మనందరికీ తెలుసు కనుక ప్రత్యేకంగా ప్రయాస పడి నిర్వచనం చెప్పను.

భిన్నాలని ఎవరు ఎప్పుడు కనుక్కున్నారో ఎవ్వరికీ తెలియదు. కాని `భిన్నం` అనగా 'భాగం' అనే భావన మానవుడి పుర్రెలో పుట్టినదే; అంటే, ఇది సహజమైన భావం కాదు, కల్పితమైన భావం. క్రీస్తు పూర్వం 1650 ప్రాంతాలదైన `రింద్ పపైరస్' (Rhind papyrus) లో 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 వంటి ఏకలవ భిన్నాలకి (అంటే లవంలో 1 ఉన్న భిన్నాలు), 2/3 కి ప్రత్యేకమైన మాటలు కనిపిస్తాయి. మన తెలుగులో కూడ చూడండి, 1/2 ని అర అనీ, 1/4 ని పావు అనీ అంటాం. మూడు పావులు అని చెప్పాలంటే సంధి చేసి ముప్పావు అంటాం. తెలుగులో, నాకు తెలుసున్నంత వరకు, 2/3 కి గానీ, తదితర భిన్నాలకి గాని ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నట్లు లేదు. ముప్పేట అంటే 3/4 అనే అర్థం వస్తుంది, కాని ఈ మాట కొబ్బరి కాయ ఎంత ముదిరిందో చెప్పడానికే వాడటం నా చిన్నతనంలో విన్నాను. కాని ఆంధ్రభారతి నిఘంటువులలో ఈ మాట లేదు.

1 నిష్ప సంఖ్యలు (Rational Numbers)

పూర్ణ సంఖ్యలని, భిన్న సంఖ్యలని గుత్తగుచ్చి వాటికి నిష్ప సంఖ్యలు అని ఒక కొత్త పేరు పెడదాం. `నిష్ప సంఖ్యలు` అంటే లవము, హారము ఉండి నిష్పత్తి ని తెలియజేసేవి. ఇక్కడ ఇలా కొత్త పేరు పెట్టడంలో విజ్ఞత తరువాత అర్థం అవుతుంది. ఈ నిష్ప సంఖ్యలనే ఇంగ్లీషులో 'రేషనల్ నంబర్స్' (rational numbers) అంటారు – అంటే 'రేషో' (ratio) లేదా నిష్పత్తిని సూచించేవి. ('రేషనల్' అన్న ఇంగ్లీషు మాటకి రెండు అర్థాలు ఉన్నాయి: ఒకటి, తర్కబద్ధమైన అనిన్నీ, మరొకటి నిష్పత్తిని సూచించేది అనిన్నీ.) నిష్ప సంఖ్యలని ఉపయోగించి మనం కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు చేసినప్పుడు వచ్చే సమాధానం ఎల్లప్పుడూ నిష్ప సంఖ్యే అవుతుంది. అంటే అంకగణితం (arithmetic) చేసేటప్పుడు నిష్ప సంఖ్యలు సంవృతాలు. (Rational numbers are closed under

arithmetic operations). అందుకనే నిష్ప సంఖ్యల గురించి మనం ఎంత నేర్చుకుంటే అంత మంచిది.

ఈ ఆధునిక యుగంలో అంకగణితం ఒక్కటీ చెయ్యడం వస్తే సరిపోదని ఏ ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థిని అడిగినా తెలుస్తుంది. మన ప్రగతికి బీజగణితం (algebra) ఎంతో ముఖ్యం. బీజగణితంలో వర్గమూలం (square root) విలువ కట్టడం ఒక సర్వసాధారణమైన ప్రక్రియ. ఉదాహరణకి 2 యొక్క వర్గమూలం ఉరమరగా 1.414. ఉరమరిక లేకుండా నిక్కచ్చిగా రాయాలంటే 1 వేసి, దాని పక్క దశాంశ బిందువు పెట్టి, అటు తరువాత నిర్విరామంగా అలా అంతులేనన్ని అంకెలని వేసుకుంటూ పోవాలి. ఇటువంటి సంఖ్యలని ఏ రెండు పూర్ణాంకాల నిష్పత్తిలాగా రాయలేము. అంటే, వాటిని భిన్నాలుగా, లేదా నిష్ప సంఖ్యలుగా, రాయలేము. అంటే ఏమిటన్న మాట? మన 2 యొక్క వర్గమూలం పూర్ణ సంఖ్య కాదు, భిన్న సంఖ్య (లేదా నిష్ప సంఖ్య) కాదు. ఇదేదో కొత్త రకం సంఖ్య. బీజగణితంలో ఈ కొత్త రకం సంఖ్యలు కొల్లలుగా కనిపిస్తాయి. కనుక బీజగణితం చేసేటప్పుడు నిష్ప సంఖ్యలు సంవృత లక్షణం ప్రదర్శించటం లేదన్నమాట. సంవృతత్త్వం కావాలంటే సంఖ్యల పరిధిని మరికొంచెం పెంచాలి. ఈ పరిధిని పెంచటానికి కావలసిన కొత్త రకం సంఖ్యలని అనిష్ప సంఖ్యలు (irrational numbers) అంటారు. అంటే, "రేషనల్" కానివి. అంటే, నిష్పత్తిలా రాయటానికి లొంగనివి.

2 అనిష్ప సంఖ్యలు (Irrational Numbers)

అనిష్ప సంఖ్య అనే భావం మన అనుభవ పరిధికి అతీతమైనది. వీటిని ఇంగ్లీషులో `ఇర్రేషనల్` (irrational) సంఖ్యలు అంటారు. `రేషనల్` కానివి `ఇర్రేషనల్.` ఇక్కడ ఈ `రేషనల్` అన్న మాట `రేష్యొ` (ratio) అన్న మాటకి సంబంధించినది. ఒక నిష్పత్తి రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలు నిష్ప సంఖ్యలు (rational numbers). ఒక సంఖ్యని నిష్పత్తి రూపంలో రాయలేని పక్షంలో ఆ సంఖ్య అనిష్ప సంఖ్య (irrational number). పూర్ణ సంఖ్యలు కానివి, నిష్ప సంఖ్యలు కానివి అయిన సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం యవనులకి అవగతం అయేసరికి వారి ఆశ్చర్యానికి అంతు లేదు.

తెలుగు అకాడమీ వారి పదకోశంలో 'అకరణీయ' అంటే రేషనల్ అనిన్నీ, 'కరణీయ' అంటే ఇర్రేషనల్ అనిన్నీ ఉంది. ఈ ప్రయోగాలు నాకు రుచించలేదు. మొదటి అభ్యంతరం: అకరణీయ అంటే 'ఇర్రేషనల్ కానిది రేషనల్' అన్న తిరకాసు నిర్వచనంలా అనిపించింది. 'అబద్ధం కానిది నిజం' అని నిజానికి నిర్వచనం చెప్పినట్లు అనిపించింది. ఉత్తరోత్తర్యా తెలుగు లోంచి ఇంగ్లీషులోకి వెళ్లవలసి

వచ్చినప్పుడు 'అకరణీయ' లో 'అ' ని చూసి ఇది 'ఇర్రేషనల్' అనుకునే ప్రమాదం ఉంది. రెండవ అభ్యంతరం: ఈ 'కరణ' శబ్దానికి మూలం ఏమిటో తెలియకపోవడం వల్ల ఈ ప్రయోగం స్వయంబోధకంగా లేదనిపించింది. తెలుగు అకాడమీ వారి పదకోశంలో మరొక చోట 'రేషనల్' అంటే 'సయుక్తిక' అనిన్నీ, 'ఇర్రేషనల్' అంటే 'యుక్తి విరుద్ధమైన' అనిన్నీ ఉన్నాయి. ఇదీ నాకు రుచించలేదు. అందుకని నిష్ప సంఖ్యలు, అనిష్ప సంఖ్యలు అనే కొత్త ప్రయోగం చేసి చూస్తున్నాను.

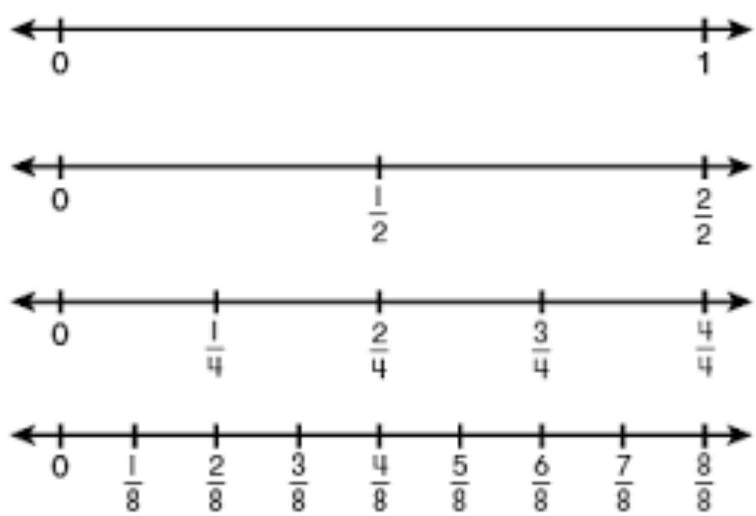
అనిష్ప సంఖ్యల అవసరం మన దైనందిన వ్యవహారాలలో ఎలా వస్తుందో చూపిస్తాను. ఒక చతురస్రంలో కర్ణం యొక్క పొడుగుని లెక్క కట్టాలంటే భుజం పొడుగుని ఏ నిష్ప సంఖ్యతో గుణించినా సరి అయిన సమాధానం రాదని పైథోగరోస్ కనుక్కున్నాడు. ఇదే విషయం మరొక విధంగా చెపుతా. ఒక చతురస్రంలో కర్ణం పొడుగుకి, భుజం పొడుగుకి మధ్య ఉండే సంబంధాన్ని రెండు పూర్ణ సంఖ్యల నిష్పత్తితో వ్యక్త పరచ లేము. మన చతురస్రం యొక్క భుజం పొడుగు ఒక అంగుళం అనుకుంటే, పైథోగరోస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, కర్ణం పొడుగు $\sqrt{2}$ (అంటే 2 యొక్క వర్గమూలం) అంగుళాలు. కనుక $\sqrt{2}$ అనిష్ప సంఖ్యకి ఒక ఉదాహరణ. పైథోగరోస్ కి అనిష్ప సంఖ్యకి మధ్య ఉన్న బాదరాయణ సంబంధాన్ని పురస్కరించుకుని $\sqrt{2}$ కి "పైథోగరోస్ సంఖ్య" అని పేరు పెట్టేరు.

అనిష్ప సంఖ్యలు ఉన్నాయనే విషయం మొట్టమొదట పైథోగరోస్ మనోవీధిలోనే మెరిసి ఉండుంటుందని కొందరి సిద్ధాంతం. ఇది నిజమో కాదో ఇతమిద్ధంగా మనకే కాదు, ఎవ్వరికీ తెలియదు. ఎందుకంటే బాబిలోనియా లోని మట్టి పలకల మీద చూపిన ఒక లెక్కలో $\sqrt{2}$ యొక్క విలువ 14 దశాంశ స్థానాల వరకు తప్పు లేకుండా లెక్క కట్టబడి ఉంది. కాని పైథోగరోస్ శిష్యులు తమ కూటమే ఈ ఘన విజయం మొట్టమొదటగా సాధించిందన్న అపోహతో శత వృషభ శిరచ్ఛేద యాగం చేసేరని ఒక ఐతిహ్యం ఉంది.

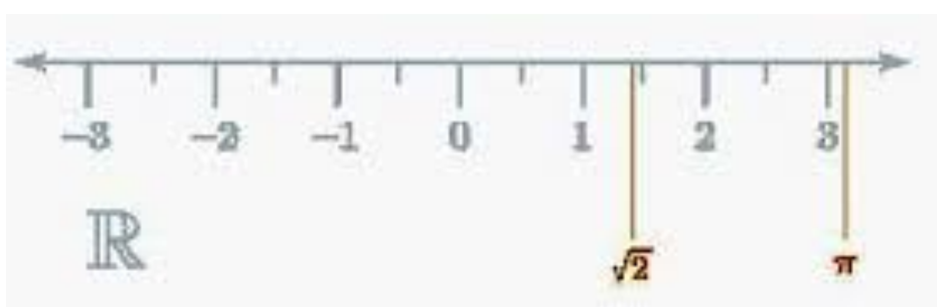
ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళం చొప్పున ఉన్న (సమబాహు) చతుర్భుజి యొక్క కర్ణం $\sqrt{2}$ అయినట్లే, ఒకొక్క బాహువు పొడుగు ఒకొక్క అంగుళం చొప్పున ఉన్న (సమబాహు) పంచభుజి యొక్క కర్ణం కూడా అనిష్ప సంఖ్యే. దీనిని ముద్దుగా సువర్ణ నిష్పత్తి (golden ratio) అని పిలుస్తారు. దీని విలువ $(1 + \sqrt{5})/2$. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పొడుగు వెడల్పులకి మధ్య ఉండే నిష్పత్తి ఈ సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉంటే ఆ దీర్ఘ చతురస్రం కంటికి ఎంతో ఇంపుగా కనిపిస్తుందని చిత్రకారులు అంటారు. మనుష్యుల ముఖాలు కొంచెం పరిశీలించి చూడండి. అవి గుండ్రంగా చంద్రబింబాన్ని పోలి ఉంటే

చలివిడి ముద్దలాగో, బొర్లించిన సిబ్బిలాగో ఉందంటాం. కోలగా పొడుగ్గా ఉంటే గజం బద్దలా ఉందంటాం. ముఖం పొడవు, వెడల్పు మధ్య ఉండే నిష్పత్తి సువర్ణ సంఖ్యకి దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు ఆ ముఖం అందంగా కనిపిస్తుందిట.

నిష్ప సంఖ్యలని, అనిష్ప సంఖ్యలని కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద చూపించవచ్చు. బొమ్మ 1, బొమ్మ 2 చూడండి



బొమ్మ 1 సంఖ్యా రేఖ మీద నిష్ప సంఖ్యలకి చోటు ఉంది.



బొమ్మ 2 సంఖ్యా రేఖ మీద అనిష్ప సంఖ్యలకి కూడ చోటు ఉంది.

3 లోకోత్తర సంఖ్యలు (Transcendental Numbers)

అనిష్ప సంఖ్యల ఉనికి బీజ సమీకరణాలు (algebraic equations) పరిష్కరిస్తూన్న సందర్భంలో అవగతం అవుతాయి. ఒక సమీకరణం బీజ సమీకరణం కాని సందర్భాలలో మరొక రకం సంఖ్యలు ఎదురవుతాయి. వీటిని లోకోత్తర సంఖ్యలు అని అందాం. ఈ జాతికి చెందిన సంఖ్యకి ఉదాహరణ π (పై). ఒక వృత్తంలో పరిధి పొడుగుని వ్యాసం పొడుగు చేత భాగిస్తే ఆ భాగారం ఎంతసేపు చేసినా తెగదు. అందుకని ఆ భాగఫలానికి ప్రత్యేకించి ఒక పేరు కేటాయించేరు. ఆ పేరే “పై.” ఈ π అనిష్ప సంఖ్య జాతికి చెందదని పెద్దలు తీర్మానించి, ఈ జాతి సంఖ్యలని లోకోత్తర లేదా అనుభవాతీత లేదా బీజాతీత సంఖ్యలు అనమని చెప్పేరు. ఈ π రామానుజన్ ప్రీతిపాత్రమైన సంఖ్యలలో ఒకటి. ఈ π విలువ 39 దశాంశ స్థానాల వరకు

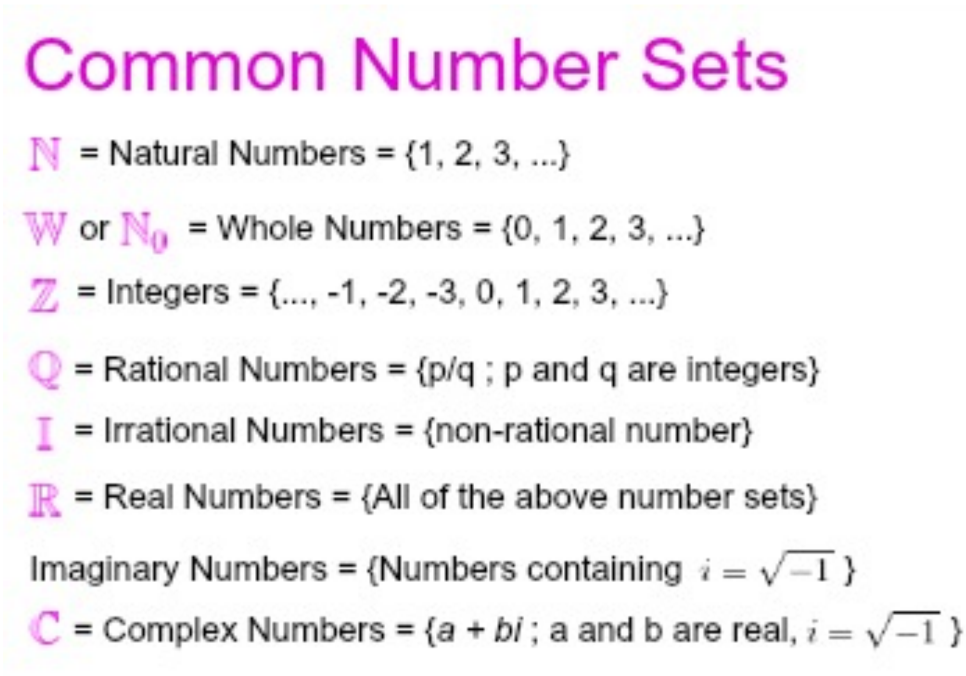
π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 420….

సహజ సంవర్గమానం (natural logarithm) కి మూలమైన నేపియర్ సంఖ్య e కూడ లోకోత్తర సంఖ్యే. ఈ e విలువ 26 దశాంశ స్థానాల వరకు

e = 2. 71828 18284 59045 23536 02874 ….

4 అన్ని రకాల సంఖ్యలు ఒక బొమ్మలో

ఇప్పటివరకు నేర్చుకున్న సంఖ్యలు అన్నిటినీ బొమ్మ 3 లో క్లుప్తంగా చూపెడుతున్నాను.



బొమ్మ 3 అన్ని జాతుల సంఖ్యల పరస్పర సంబంధం

18. జంట సంఖ్యలు (Complex Numbers)

ఇప్పుడు మరొక రకం సంఖ్యల అవసరం ఎలా వస్తుందో తెలుసుకుందాం. నిజ (వాస్తవ) రేఖ మీద గుర్తు పెట్టగలిగే సంఖ్యలని నిజ (వాస్తవ) సంఖ్యలు అంటారు. నిజ రేఖ మీద ఒక చోట ఒక చుక్క పెట్టి అక్కడ 0 వేసి, అక్కడనుండి, కొలబద్ద సహాయంతో 1, 2, 3, ... అనుకుంటూ ఓపిక ఉన్నంత సేపు కుడిపక్కకి జరుగుతూ చుక్కలు పెట్టుకుంటూ పోవచ్చు. సున్న నుండి ఎడం పక్కకి జరుగుతూ -1, -2, -3,..... అనుకుంటూ కూడ చుక్కలు పెట్టగలం. అలాగే ½, 2/3, అనుకుంటూ మనకి తోచిన నిష్ప సంఖ్యల (rational numbers) ఉనికిని గుర్తు పెట్టవచ్చు. నిష్పత్తి రూపంలో రాయడానికి కుదరని $\sqrt{2}$ వంటి అనిష్ప సంఖ్యలని (irrational numbers), π, e, మొదలైన లోకోత్తర సంఖ్యలని (transcendental numbers) ని కూడ ఈ నిజ రేఖ మీద గుర్తించవచ్చు.

1 కల్పన సంఖ్యలు (Imaginary Numbers)

కాని కొన్ని సందర్భాలలో – ప్రత్యేకించి సర్వసాధారణంగా ఎదురయ్యే వర్గ సమీకరణాలని పరిష్కరించే సందర్భాలలో కూడ - ఋణ సంఖ్యలకి వర్గమూలం తియ్యవలసిన అవసరం వస్తూ ఉంటుంది. ఉదాహరణకి $x^2 + 2x + 2 = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క రెండు మూలాలు (roots) లేదా శూన్యస్థానాలు (zeros) లెక్క కట్టేటప్పుడు ($\sqrt{-4}$) అనే గణిత ప్రక్రియ (అంటే, ఋణ 4 కి వర్గమూలం తియ్యడం) చెయ్యవలసిన అవసరం వస్తుంది. ఇంతకీ ($\sqrt{-4}$) అంటే ఏమిటి? అనగా, ఏ రెండు సర్వసమానమైన సంఖ్యలని గుణిస్తే ఫలితం (- 4) అవుతుంది? ఇది అసంభవమైన పని, ఎందుకంటే రెండు సర్వసమానమైన సంఖ్యలని (రెండూ ధన అయినా, రెండూ ఋణ అయినా) వాటిని గుణిస్తే వచ్చే సమాధానం ఎల్లప్పుడు ధన సంఖ్యే అవుతుంది కదా. అంటే ఋణ సంఖ్యకి వర్గమూలం తియ్యడం అనే పని అసంభవం. కాని ఇలా ఋణ సంఖ్యకి వర్గమూలం తియ్యవలసిన పని తరచు ఎదురవుతూ ఉంటుంది. కాని నిజ రేఖ మీద తారసపడే సంఖ్యలలో ఈ రకం లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలు లేవు. లేదా, ఈ రకం సంఖ్యలకి నిజ రేఖ మీద చోటు లేదు. పూర్వం సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగారం చేసినప్పుడు ఎదురయిన సంవృతం (closure) లాంటి పరిస్థితి కాదు ఇది. అంతకంటె విషమమైనది.

ఈ పరిస్థితిని ఎదుర్కోడానికి మనకి కొత్త జాతి సంఖ్యలు కావాలి. వాటికి ఏ లక్షణం ఉండాలి? అన్ని విధాలా సర్వసమానంగా ఉన్న రెండింటిని తీసుకుని గుణిస్తే ఋణ సంఖ్య రావాలి. అదీ మన గొంతేలమ్మ కోరిక. ఎలా ఈ కోరిక తీర్చడం?

2 జంట సంఖ్యలు (Complex Numbers)

ఇక్కడ ఉపమానానికి ఒక కట్టు కథ చెబుతాను. పూర్వం ఒక రైతు ఉండేవాడు. అతనికి సత్యం అనే మగ పిల్లాడు పుట్టేడు. అతను ఆ రైతుకి చేదోడు, వాదోడుగా ఉంటున్నాడు. సత్యం పెద్దయ్యాక ఇల్లు బోసిగా కనిపించడం మొదలు పెట్టింది. ఇంట్లో పిల్లలుంటే బాగుంటుంది కదా అని కొడుకుకి పెళ్లి చేసేడు. కోడలు కల్పన కాపురానికి వచ్చింది. మరో ఇంట పెరిగిన పిల్ల కదా; ఆమె ధోరణే వేరు. కొడుకు “ఎడ్డెం” అంటే కోడలు “తెడ్డెం” అనేది. పిల్లని ఇంట్లోంచి పొమ్మందామా అంటే ముసలాడికి మనవలు కావాలి. కనుక ఆ ముసలాడు కొడుకుకీ కోడలికీ మధ్య ఒక ఒప్పందం కుదిర్చేడు. ఇంట్లో ఏ నిర్ణయం చెయ్యవలసి వచ్చినా కొడుకు సత్యం సూచించిన దిశలో కాకుండా, కోడలు కల్పన సూచించిన దిశలో కాకుండా, ఇద్దరి మాటా చెల్లుతూన్నట్లు అనిపించేలా, మధ్యేమార్గం అవలంబించడం మొదలు పెట్టేరు. అంటే, ఇటుపైన ఏకాభిప్రాయానికి బదులు "జంటాభిప్రాయం" అమలులోకి వచ్చింది.

పైన చేసుకున్న ఒప్పందాన్ని ఒక బొమ్మ రూపంలో చిత్రించుకుందాం. కొడుకు సత్యం ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని ఒక గీత మీద చుక్కలుగా ఊహించుకుందాం. ఇది "సత్య రేఖ." కోడలు ధోరణే వేరు కనుక ఆవిడ ఇష్టాఇష్టాలు ఈ సత్య రేఖ మీద కనబడవు, ఇమడవు. అందుకని ఆమె కోసం మరొక గీత గీద్దాం. దానికి మరొక పేరు పెట్టాలి కదా? దానికి “కల్పన రేఖ” అని పేరు పెడదాం. కొడుకు ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని సత్య రేఖ మీద చుక్కలుగా ఊహించుకున్నట్లే కోడలి ఇష్టాఇష్టాలన్నిటిని “కల్పన రేఖ” మీద చుక్కలుగా ఊహించుకుందాం. ఇప్పుడు ఇంట్లో ఏ నిర్ణయం చెయ్యవలసి వచ్చినా కొడుకు, కోడలు అభిప్రాయాలు వెలిబుచ్చుతారు. కొడుకు అభిప్రాయాన్ని (3) అందాం. కోడలి అభిప్రాయాన్ని (4) అందాం. ఇప్పుడు "జంట అభిప్రాయం" కావాలంటే సత్య రేఖ మీద, కుడి వైపు 3 అడుగులు వేసి, కల్పన రేఖ మీద 4 అడుగులు ఎగువకి వెళ్లాలి. ఇదే విధంగా జంట అభిప్రాయం (-2, 5) అంటే సత్య రేఖ మీద వెనక్కి రెండడుగులు వేసి, కల్పన రేఖ మీద ఎగువకి 5 అడుగులు వెయ్యాలి. అదీ నియమం.

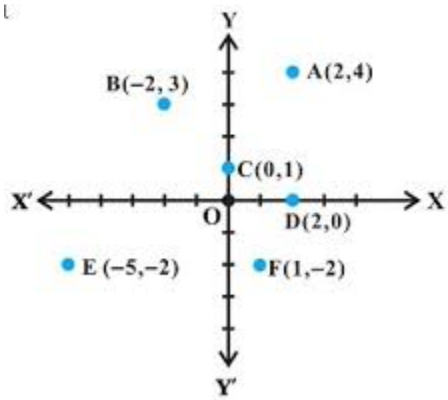


Fig 5.1

బొమ్మ 1 సత్య రేఖ (x), కల్పన రేఖ (y), జంట అభిప్రాయాలు (x, y)

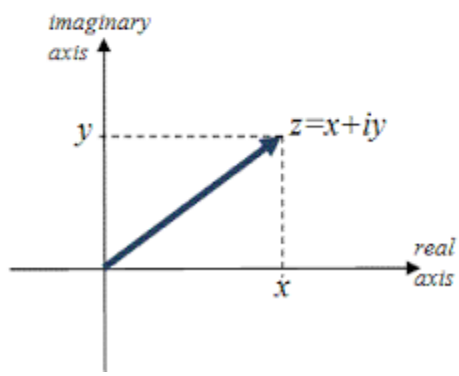
చూసేరా! నిజ “రేఖ” మీద కుడి వైపు, ఎడమ వైపు మాత్రమే ప్రయాణం సాధ్యం. ఇప్పుడు మనం సృష్టించిన కల్పన “తలం” మీద తూర్పు, పడమర, ఉత్తర, దక్షిణ దిశలలోనే కాకుండా లెక్క పెట్టలేనన్ని దిశలలో ప్రయాణం చెయ్యవచ్చు. ఏకాకిగా బతికిన సత్యానికి రెండే రెండు దిశలు శరణ్యం అయితే ఏకాకిగా బతికిన రోజుల్లో కల్పనకి కూడా రెండే దిశలు శరణ్యం అయాయి. ఇప్పుడో? పెళ్లయిన తరువాత వారికి దొరికిన జంట అవకాశాలు అనంతం. కనుక వారిరువురు కలసి నిర్మించుకున్న ఈ జంట తలం, ఈ కల్పన తలం, వారి ఊహా స్వర్గమే. తన ఊహకి మించిన స్వర్గాన్ని చవి చూస్తోంది కనుక కల్పన తన పేరు మీదుగా ఉన్న కల్పన రేఖని "ఊహా రేఖ" అని కూడ పిలుస్తూ ఉంటుంది.

మన ఉపమానం పూర్తి అయింది. ఇప్పుడు నిజ రేఖ నిజ సంఖ్యలకి స్థావరాలుగా వాడదాం. నిజ రేఖ మీద ఇమడని $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, వంటి అసాధారణ సంఖ్యలకి ఊహా రేఖ మీద స్థావరాలు కల్పిద్దాం. రాత సౌలభ్యం కొరకు $\sqrt{-1}$= i అనిన్ని, $\sqrt{-2}$ = 2i అనిన్నీ అనుకుంటూ కల్పనా రేఖ మీద స్థావరాలని సూచిద్దాం. ఈ అసాధారణ సంఖ్యలని, కల్పన గౌరవార్థం, కల్పన సంఖ్యలు, లేదా ఊహా సంఖ్యలు (imaginary numbers) అని అందాం. ఈ రెండింటిని కలిపి "జంట సంఖ్యలు" (complex numbers) అందాం. ఈ జంట సంఖ్యలలో ఏవి సత్యానివో, ఏవి కల్పనవో అనుమానం లేకుండా చెప్పడానికి కల్పన రేఖ మీద సంఖ్యలన్నిటి ముందు i అనే అక్షరం చేర్చుదాం. ఈ పద్ధతి ప్రకారం (3, -4i) అంటే 3 అడుగులు నిజ రేఖ మీద కుడి వైపు వేసి, అక్కడ నుండి 4 అడుగులు కల్పన రేఖ మీద దిగువకి వెళ్లాలి అని అర్థం.

మన దురదృష్టం కొద్దీ ఇంగ్లీషులో "ఇమేజినరీ," "కాంప్లెక్స్" వంటి క్లిష్టమైన పదాలు వాడి మనకి భయం పుట్టించేరు కాని "నిజ సంఖ్యలు" లో ఎంత వాస్తవం ఉందో "కల్పన సంఖ్యలు" లోనూ అంతే వాస్తవం ఉంది. సత్యం ఎంత వాస్తవమో, కల్పన అంతే వాస్తవం. మనవాళ్లు ఇంగ్లీషులో ఉన్న complex numbers ని యథాతథంగా అనువదించి వీటిని "సంకీర్ణ సంఖ్యలు" అనమన్నారు. వీటిలో సంకీర్ణత ఏముంది? నిజానికి నిజ (వాస్తవ) సంఖ్యలలో "వాస్తవత్వం" ఏమీ లేదు, కల్పన (imaginary) సంఖ్యలలో "కల్పన" ఏమీ లేదు. ఇంగ్లీషు వాడుకలో complex, real, imaginary అనేవి పాతుకుపోయాయి. వీటికి సమానార్థకమైన తెలుగు మాటలు తయారు చేసుకునేటప్పుడు వాటి స్వరూప, స్వభావాలకి అనుగుణంగా పేర్లు పెట్టుకుందాం.

ఇదీ జంట బీజగణితానికి నాంది. ఆడదాని ప్రాపు లేకుండా మగాడు దమ్మిడీకి కూడ ఎలా చెల్లడో అదే విధంగా కల్పన అక్షం సహాయం లేకుండా కేవలం నిజ అక్షాన్ని పట్టుకుని వేల్లాడుతూ కూర్చుంటే చెయ్యవలసిన పనులు చెయ్యడం కష్టం.

ఇప్పుడు మనం నిర్మించిన జంట తలం (complex plane) ఎలా ఉంటుందో చూద్దాం. (బొమ్మ 18.2 చూడండి). ఎడమ నుండి కుడికి వెళ్లే గీతని నిజ అక్షం(real axis) అందాం. దీనికి లంబ దిశలో అడుగునుండి పైకి వెళ్లే గీతని కల్పన అక్షం (imaginary axis) అందాం. మనకి ఎదురయ్యే సంఖ్యలు నిష్ప సంఖ్యలు కాని, అనిష్ప సంఖ్యలు కాని అయితే వాటికి ఈ నిజ అక్షం మీద ఎక్కడో ఒక చోట స్థావరం దొరుకుతుంది. మనకి ఎదురయ్యే "జంట సంఖ్య" (complex number) z అయితే దాని స్థావరం "జంట తలం" లో ఎక్కడో ఒక చోట ఉంటుంది. అది ఎక్కడ ఉంటుంది? జంట సంఖ్య z లో సత్యం పాలు x, కల్పన పాలు y అయినప్పుడు z = (x , i y) లేదా z = x + i y రాస్తారు.



బొమ్మ 2 జంట తలంలో ఒక జంట సంఖ్య z ని సూచించడం

3 రామానుజన్, జంట సంఖ్యలు

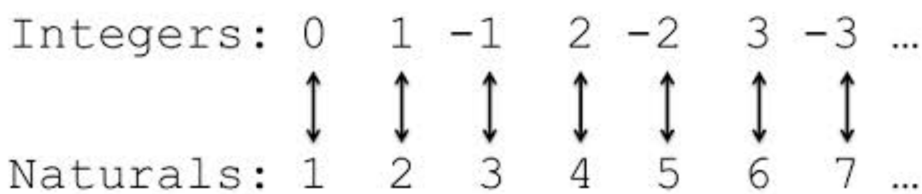
రామానుజన్ ఇంగ్లండు వెళ్లక పూర్వం ఆయనకి ఈ జంట సంఖ్యల ఉనికి తెలిసి ఉన్నట్లు దాఖలాలు లేవు; ఋష్యశృంగుడు లా అయన నిజ రేఖ మీద కనబడే నిజ సంఖ్యల మధ్యనే బతికేడు. జీటా ప్రమేయం విలువ కట్టినప్పుడు కూడ ఆయన ఋణ నిజ రేఖ మీద విలువలనే లెక్కలోకి తీసుకున్నట్లు కనిపిస్తుంది. అంటే రామానుజన్ “ఆయిలర్ జీటా ప్రమేయాన్ని” మళ్లా సొంతంగా కనిపెట్టి నిజ రేఖ మీద దాని లక్షణాలని గుర్తించేరు. కాని ఇదే ప్రమేయాన్ని రీమాన్ జంట తలానికి అనువర్తింపచేసేరన్న విషయం రామానుజన్ కి తెలియక పోవడం మన దురదృష్టం. ఈ కారణం వల్ల రామానుజన్ ఇండియాలో ఉండగా ప్రధాన సంఖ్యల మీద చేసిన పరిశోధన అంతా ఒక విధంగా “కంచి గరుడ సేవే” అయిపోయింది.

19. అనంతాలు (Infinities)

నిజ సంఖ్యలన్నింటిని ఒక సరళ రేఖ మీద బిందువులుగా ఊహించుకోవచ్చని తెలుసుకున్నాం కదా! అనగా, ఒక సరళరేఖ మీద, ఒక వరుసక్రమంలో అమర్చగలిగిన సంఖ్యలని నిజ సంఖ్యలు అని నిర్వచించవచ్చు. అప్పుడు ఈ సరళ రేఖని 'నిజ రేఖ' (real line) అని పిలుస్తారు. ఈ నిజ రేఖ స్వరూప స్వభావాలు మరొక సారి పునశ్చరణ చేసుకుందాం. ఒక కాగితం మీద తిన్నని గీత గీసి, దాని మధ్యలో ఒక చుక్క పెట్టి, దానిని 'సున్న' అని పిలవండి. ఆ సున్నకి, కుడి పక్కన, ఒక అంగుళం దూరంలో మరొక చుక్క పెట్టి దానిని 'ఒకటి' అని పిలవండి. అలా నిర్విరామంగా అంగుళమేసి వ్యవధులలో 2, 3, 4,…. అనుకుంటూ చుక్కలు పెట్టండి. ఇదే విధంగా సున్నకి ఎడమ పక్కన -1, -2, -3, అనుకుంటూ వెళ్లండి. ఇప్పుడు ఇదే రేఖ మీద భిన్నాలన్నిటినీ (నిష్ప సంఖ్యలని) కూడ వేసి గుర్తించవచ్చు కాని, వీటన్నిటికీ కాగితం మీద చూపటం కష్టం కనుక మచ్చుకి బొమ్మలో కొన్నే చూపిస్తారు. ఇదే రేఖ మీద అనిష్ప సంఖ్యలు ఎక్కడ ఉంటాయో ఉరమరగా చూపించవచ్చు. ఇక్కడ గమనించవలసినది ఏమిటంటే గీత మీద నిజ సంఖ్యలన్నిటికీ స్థావరం ఉంది. దీనినే తిరకాసుగా చెప్పాలంటే నిజ రేఖ మీద ఉండే బిందువులన్నీ ఏదో ఒక నిజ సంఖ్యకి స్థావరం.

ఈ నిజ రేఖ మీద ఉన్న అనంతమైనన్ని (infinite) బిందువులలో అతి కొద్ది బిందువులే సహజ సంఖ్యలకి స్థావరాలు. వాటినే మనం "1, 2, 3,…," అని పిలుస్తున్నాం. ఇక్కడ 3 తరువాత మూడు చుక్కలు పెట్టడంలో అర్థం ఏమిటంటే ఈ సహజ సంఖ్యలు అవిరామంగా అలా వస్తూనే ఉంటాయని చెప్పడానికి! అంటే, ఆ గీత మీద ఎంత దూరం ప్రయాణం చేసినా సహజ సంఖ్యలు, అంతు లేకుండా, అలా వస్తూనే ఉంటాయి. ఈ "అంతు లేని తనం" అనే భావాన్ని అనంతం (infinity) అంటారు. అంటే, అనంతం అనేది కేవలం ఒక భావం. అది 1, 2, 3, లాంటి అంకె కాదు. అనంతం అంకె కాదు కనుక దానితో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు చెయ్యలేము. గణితంలో శూన్యం అన్న భావానికి '0' అనే గుర్తు ఉన్నట్లే, ఈ 'అనంతం' అనే భావానికి ∞ (పడుక్కోబెట్టిన 8) అనే గుర్తుని వాడతారు. కాని 0 (సున్న) కీ ∞ (అనంతానికి) ఒక ముఖ్యమైన తేడా ఉంది. అన్ని అంకెలలాంటిదే "సున్న" అనే అంకె; దానితో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు చెయ్యవచ్చు. సున్నతో భాగారం చెయ్యడానికి వీలు పడదు. ఇదే ధోరణిలో, ∞ (అనంతం) తో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగారాలు చెయ్యడం కుదరదు; ఎందుకంటే ∞ ఒక సంఖ్య కాదు; ఇది కేవలం ఒక భావం మాత్రమే! కాని శాస్త్రంలో సున్న ఎంత తరచుగా వస్తుందో అనంతం కూడ అంత తరచుగానూ వస్తూ ఉంటుంది. కనుక అనంతంతో "వేగడం" నేర్చుకోవాలి, లేకపోతే రోజు గడవదు.

అనంతం గురించి అర్థం చేసుకోడానికి కొన్ని ప్రయోగాలు చేసి చూద్దాం. ముందుగా సహజ సంఖ్యలతో 1, 2, 3, ..., అనుకుంటూ ఒక పొడుగాటి జాబితా తయారు చేద్దాం. ఇదే విధంగా పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, ..., అనుకుంటూ మరొక పొడుగాటి జాబితా తయారు చేద్దాం. ఇప్పుడు ఈ రెండు జాబితాలలో ఏ జాబితాలో ఎక్కువ సంఖ్యలు ఉన్నాయి? సామాన్యులకి రెండవ జాబితాలో ఎక్కువ ఉన్నట్లు అనిపిస్తుంది కాని అది కేవలం ఒక భ్రమ అని నిరూపించడం తేలిక. బొమ్మ 1 లో చూపినట్లు పూర్ణ సంఖ్యలని పై వరుసలోను, సహజ సంఖ్యలని కింది వరుసలోను అమర్చి, ఈ రెండు వరసల మధ్య "ముఖా-ముఖీ సంబంధం" (one-one correspondence) చూపిస్తూ రెండు తలల బాణపు గుర్తులు వేద్దాం. దీనిని బట్టి పై జాబితాలో ఎన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయో కింది జాబితాలోనూ అన్నే సంఖ్యలు ఉన్నాయని స్పష్టం అవుతోంది కదా. కనుక సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో పూర్ణ సంఖ్యలూ అన్నే ఉన్నాయి. ఇది నమ్మ శక్యం కాని నిజాలలో ఒకటి!

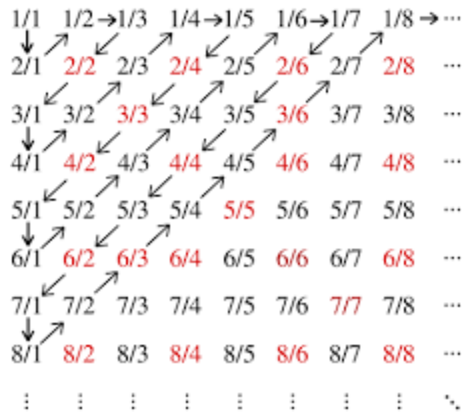


బొమ్మ 1 సహజ సంఖ్యలు (Naturals) ఎన్ని ఉన్నాయో పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers) కూడ అన్నే ఉన్నాయని ఋజువు చేసే చిత్రం.

ఇప్పుడు మరొక ప్రయోగం చేద్దాం. సహజ సంఖ్యకీ, సహజ సంఖ్యకీ మధ్య ఉన్న ఖాళీలో భిన్నాలు ఉన్నాయి కదా. ఉదాహరణకి 1 కి, 2 కి మధ్య 1/2, 1/3, ¼,… వగైరాలు ఉన్నాయి. అంతే కాదు; 2/3, 2/4, 2/5, వగైరాలు కూడ ఉన్నాయి. అంతే కాదు; ¾, 3/5, వగైరాలు కూడ ఉన్నాయి. ఈ “వగైరాలని” లెక్క వేసుకుంటూ పోతే అవి కూడ అనంతంగా ఉంటాయి.

అంటే ఏమిటన్నమాట? నిజ రేఖ మీద ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైనన్ని భిన్నాలు ఉన్నాయి. అనంతమైనన్ని పూర్ణసంఖ్యల మధ్య ఉన్న అనంతమైనన్ని ఖాళీ స్థలాలలోనూ, అనంతమైనన్ని భిన్నాలు ఉన్నాయి. అటువంటప్పుడు మొత్తం భిన్నాలు ఎన్ని? “అనంతమైనన్ని అనంతాల మొత్తం” కదా! అంటే సహజ సంఖ్యల “అనంతం” కంటె భిన్న సంఖ్యల “అనంత

అనంతం" బాగా పెద్దదయి ఉండాలి. అవునా? అబ్బే! అది అలా కాదు; సహజ సంఖ్యలు ఎంత అనంతంగా ఉన్నాయో భిన్న సంఖ్యలు కూడ అంతే అనంతగా ఉన్నాయి అని కేంటర్ (Cantor) మహాశయుడు ఉటంకించేడు. ఎవ్వరూ నమ్మలేదు. దీనిని ఋజువు చేసి చూపిస్తాను.



బొమ్మ 2 భిన్నాలు (నిష్ప సంఖ్యలు) అనంతంగా ఉన్నాయని ఋజువు చెయ్యడం

మనకి తెలిసిన భిన్నాలని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమురుద్దాం (బొమ్మ 2 చూడండి). ఈ బొమ్మని జాగ్రత్తగా రెండు నిమిషాలు అధ్యయనం చెయ్యండి. ఏక-లవ భిన్నాలు అన్నీ మొదటి అరుస (row) లో ఉన్నాయి. ద్వి-లవ భిన్నాలు అన్నీ రెండవ అరుసలో ఉన్నాయి. అలా అనంతమైనన్ని అరుసలు ఒక దాని కింద మరొకటి ఉన్నాయి. ప్రతి అరుస అంతు లేకుండా అలా కుడి పక్కకి పోతూనే ఉంది. ఈ పట్టికలో మనం ఊహించగలిగే భిన్నాలు అన్నీ ఉన్నాయి. ఒక్క రవ ఆలోచించి చూసుకోండి. ఇప్పుడు, ఇందాకటి లాగే, సహజ సంఖ్యలని ఒక వరుసలో అమర్చి, వాటికి ఎదురెదురుగా వచ్చేలా ఈ పట్టికలోని భిన్నాలని అమర్చగలమేమో చూద్దాం. బొమ్మ 2 లోని మొదటి అరుస (row)తో సహజ సంఖ్యలని అమర్చడానికి ప్రయత్నిస్తే ఆ పని జన్మకి తెమలదు. ఎందువల్ల? రెండు వరుసలలోనూ అనంతమైనన్ని సంఖ్యలు ఉన్నాయి కనుక. ఈ లెక్కని బొమ్మ 2 లోని రెండవ అరుసకి అవకాశమే రాదు. ఈ చిక్కు నుండి బయటపడడానికి ఒక మార్గం ఉంది. బొమ్మ 2 లో చూపించిన వ్యూహంలోని సంఖ్యలన్నిటిని ఒకే వరుస క్రమంలో వచ్చేలా అమర్చుదాం. ఈ వరుస క్రమం బొమ్మలో వాలు బాణం గీతలతో చూపించేను. ఈ పద్ధతిని సహజ సంఖ్యలనీ, నిష్ప సంఖ్యలనీ ముఖా-ముఖీ సంబంధం వచ్చేలా అమర్చవచ్చు. అంటే సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో నిష్ప సంఖ్యలు అన్నే ఉన్నాయి!

ఇదే ధోరణిలో మరొక్క ప్రయోగం చేద్దాం. సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయో అనిష్ప సంఖ్యలు కూడ అన్నే ఉన్నాయా? దీని ఋజువు చూపిస్తూ కూర్చుంటే మనం ఇక్కడ నుండి బయట పడేది ఎప్పుడు? అందుకని టూకీగా సమాధానం చెప్పేస్తాను. అనిష్ప సంఖ్యలు కూడ అనంతమే కాని "అనిష్ప సంఖ్యల అనంతం" మనకి ఇంతవరకు పరిచయమైన "సహజ సంఖ్యల అనంతం" కంటె పెద్దది. ఇలా అనంతాలతో చెలగాటాలాడిన కేంటరు భారతదేశంలో పుట్టి ఉండవలసింది. మన వేదాంత తత్త్వశాస్త్రం ఒక మోతాదు పడి ఉంటే మనిషికి ఈ అనంతాల చెలగాటంలో పిచ్చి ఎక్కి ఉండేది కాదు.

20. ప్రధాన సంఖ్యలు (Primes)

గణితంలో ఉన్న ఒక ఉపశాఖని ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) అంటారు. ఈ ఉపశాఖలో కనబడే అందం మరెక్కడా లేదేమో అనిపిస్తుంది. గణితంలో ప్రావీణ్యం లేని వారు కూడ, గణితపు లోతులని తరచి చూసే సామర్థ్యం లేని వారు కూడ ఈ ప్రధాన సంఖ్యల అందచందాలని చవి చూడకపోతే జీవితంలో ఒక వెలితి మిగిలిపోయినట్లే. అదృష్టవశాత్తు ఈ ప్రధాన సంఖ్యలని చవి చూసి ఆనందించడానికి గణితం లోతుల్లోకి అతిగా వెళ్ళనక్కరలేదు.

ముందుగా 1, 2, 3, 4, ...వగైరాలతో మొదలు పెడదాం. వీటిని పూర్ణ సంఖ్యలు అంటారు. ఇవి అనంతమైనన్ని ఉన్నాయి. వీటిల్లో ఒక భాగం ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers); ఇవి చాల ఆసక్తి రేకెత్తించే సంఖ్యలు.

1 పూర్ణ సంఖ్యలలో ఏవి ప్రధాన సంఖ్యలు?

ప్రధాన సంఖ్యలు 1 చేత గాని, తమ చేత కాని మాత్రమే నిశ్శేషంగా భాగించడానికి లొంగేవి అని నిర్వచనం. కానీ ఈ నిర్వచనానికి ఒక మినహాయింపు ఉంది: 1 ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

ఉదాహరణకి 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., వగైరాలన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలే. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే ప్రధాన సంఖ్యలకి భాజకాలు (divisors) లేవు. అందుకని వీటిని అవిభాజ్య సంఖ్యలు అని కూడా అంటారు.

పైన చూపిన ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాలో 2 కి ఒక ప్రత్యేకత ఉంది; ఇదొక్కటే ప్రధాన సంఖ్యలలో సరి సంఖ్య!

ఒక్క 2 తప్ప మిగిలిన సరి సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు కావు. అదే విధంగా 3 చేత, 4 చేత, 5 చేత, ..., భాగించబడేవి ఏవీ ప్రధాన సంఖ్యలు కాజాలవు. ఇలా మినహాయించుకుంటూ పోగా మిగిలేవే ప్రధాన సంఖ్యలు.

ప్రధాన సంఖ్యలలో అత్యంత అందమైనది (నాకు తెలిసినంత వరకు) బెల్ఫగర్ సంఖ్య:
1000000000000066600000000000001.
అనగా 1 తరువాత 13 సున్నలు, తరువాత 666, తరువాత 13 సున్నలు, చిట్టచివర 1. ఇది ప్రధాన సంఖ్య అవునో కాదో చదువరులే తేల్చుకోవాలి.

సా. శ. పూ. 300 సంవత్సరంలో యూక్లిడ్ (Euclid) రేఖాగణిత సూత్రావళి (Elements of Geometry లేదా క్లుప్తంగా Elements) అనే పేరుతో జగద్విఖ్యాతమైన పుస్తకం ప్రచురించిన నాటికే ప్రధాన సంఖ్యలకు చెందిన సిద్ధాంతాలెన్నో ప్రమాణాత్మకంగా ప్రాచుర్యం పొంది ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతంగా ఉన్నాయని యూక్లిడ్ తన సూత్రావళి తొమ్మిదవ అధ్యాయంలో ఋజువు చేసి చూపించేడు. అంటే ప్రధాన సంఖ్యల జాబితాని తయారు చేద్దామని సంసిద్ధమైతే అది తెమిలే పని కాదు; హనుమంతుడి తోకలా ఆ జాబితా పెరుగుతూనే ఉంటుంది.

ఒక సరళరేఖ మీద సమాన దూరాలలో చుక్కలు పెట్టి, వాటి పక్క 0, 1, 2, 3, ..., అనుకుంటూ నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలని సూచించినప్పుడు దానిని "సంఖ్యా రేఖ" (number line) అంటారు. ఈ సంఖ్యా రేఖ మీద ప్రధాన సంఖ్యలని, మాటవరసకి, ఎర్ర రంగులో రాసేం అనుకుందాం. అప్పుడు గీత మొదట్లో చాల ఎర్ర రంగు సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 47 అనే పదహారు సంఖ్యలు 50 కంటే చిన్నవయిన ప్రధాన సంఖ్యలు. సంఖ్యా రేఖ మీద 100 వరకు వెళితే 25 ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. లెక్కించి చూసుకోండి. వెయ్యి వరకు వెళితే 168 ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. అంటే, సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపించడం పలచబడుతుంది, లేదా ప్రధాన సంఖ్యల సాంద్రత తగ్గుతుంది. ఈ పలచబడడం గురించి ఈ దిగువ ఇచ్చిన చిన్న ఉపమానం చూడండి.

ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలకి “కుల గజ్జి” ఉందనుకుందాం. కనుక అవి ప్రధాన సంఖ్యలతోటే వివాహాలు చేసుకుంటాయని అనుకుందాం. అప్పుడు సంఖ్యా రేఖ మొదట్లో ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలకి సంబంధాలు దొరకడం తేలిక - పక్క పక్కనే సంబంధాలు దొరుకుతాయి. సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు పలచబడతాయి కనుక అక్కడ ఉన్న వారు సంబంధాల కోసం ఇరుగునా, పొరుగునా చూస్తే దొరకడం కష్టం; కావలసిన సంబంధం కోసం “దేశాంతరాలు” దాటి పోవాలి.

ఏ పూర్ణ సంఖ్యనైనా సరే కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా, ఒక ఏకైక (unique) పద్ధతిలో - వరుస క్రమంలో మార్పులని మినహాయించి - రాయవచ్చని యూక్లిడ్ ఋజువు చేసేడు. ఉదాహరణకి:

2 = 2 x 1

8 = 2 x 2 x 2

21 = 3 x 7

666 = 2 x 3 x 3 x 37

1,234,567,890 = 2 x 3 x 3 x 5 x 3607 x 3803

దీనినే అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం (The Fundamental Theorem of Arithmetic) అంటారు.

అంతే కాదు; 2 కంటె పెద్దదయిన ఏ సరి పూర్ణ సంఖ్యనయినా కేవలం రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చనే సూత్రాన్ని గోల్డబా శిష్టాభిప్రాయం (Goldbach conjecture) అంటారు. ఇది ఇంకా ఋజువు కాలేదు.

ఇటువంటి లక్షణాలు ఉండబట్టే ఈ క్షేత్రాన్ని దున్నుతూన్న కొద్దీ వజ్రాలు పుట్టుకొస్తున్నాయి.

రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 2 అయితే వాటిని కవల ప్రధాన సంఖ్యలు లేదా "కవలలు" (twins) అంటారు. ఉదా: (3,5) ; (5,7) ; (11,13) ; (17,19) ; (29, 31); (41, 43); (59, 61); (71, 73); వగైరా. ఈ వరుస క్రమంలో తరువాత వచ్చే కవలలు మరి కొన్ని చెప్పుకోగలరా? ప్రయత్నించండి, కష్టం కాదు. ఇటువంటి కవలలు అనంతమైనన్ని ఉన్నాయని ఒక శిష్టాభిప్రాయం (Twin Prime conjecture). ఇది ఇంకా ఋజువు కాలేదు కానీ కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతమైనన్ని ఉన్నాయని నమ్మడానికి అధరాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి బిలియను దాటిన తరువాత కనిపించే కొన్ని కవల ప్రధాన సంఖ్యలు: (1000000007, 1000000009),; (1000000409, 1000000411),; (1000000931, 1000000933).

“జంట” ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం (విరామం) ఫలానా అని మనం నిర్దేశించి చెప్పవచ్చు, కాని “కవల” సంఖ్యల మధ్య దూరం ఎప్పుడూ రెండే. ఉదాహరణకి 360,169 & 360,181 అనే జంట ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 12. ఈ రెండింటి మధ్యలోమరొక ప్రధాన సంఖ్య లేదు.

మరొక ఉదాహరణగా 360,653 & 360,749 అనే జంట ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 96. కానీ 360,287 & 360,289 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 2. కనుక ఇవి కవలలు.

సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా "ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య కనిపించే విరామం (gap) ఒక అవధి దాటకుండా ప్రధాన సంఖ్యలు అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయి" అని ఈ మధ్యనే ఉద్యోగం లేక హోటలులో కప్పులు కడుగుకుంటూన్న ఈటాంగ్ జాంగ్ అనే గణితజ్ఞుడు కనుక్కుని గణిత ప్రపంచాన్ని అదరగొట్టేడు. అనగా, రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య ఉండే విరామం 70,000,000 లోపు ఉన్నంతసేపూ, అటువంటి జంటలు అనంతంగా ఉంటాయని అని తాత్పర్యం. వెనువెంటనే ఈ విరామాన్ని క్రమేపి 4680 కి, తరువాత 600 కి, తరువాత 246 కి కుదిస్తూ ఇతరులు బుజవులు సంపాదించేరు. ఈ విరామాన్ని 2 కి కుదించగలిగితే శతాబ్దాలుగా పరిష్కారం కోసం ఎదురు చూస్తున్న గోల్డబా శిష్టాభిప్రాయానికి పరిష్కారం దొరికినట్లే!!

ఈ ప్రధాన సంఖ్యలతో చెలగాటలు కేవలం సౌందర్యోపాసనకేనా? లేక, ఏదయినా ప్రయోజనం ఉందా అనే అనుమానం రావడం సహజం. ఇటీవల ఈ శాఖకి అనేక రంగాలలో ఉపయోగాలు కనిపిస్తున్నాయి.

ఉదాహరణకి, ఒక ప్రధాన సంఖ్యని – ఎంత పెద్దదైనా సరే – కనుక్కోవడం పెద్ద కష్టం కాదు కాని, ఒక సంఖ్యకి ప్రధాన సంఖ్యలయిన కారణాంకాలు (prime factors) కనుక్కోవడం చాల కష్టం. ఉదాహరణకి రెండు అంకెలు ఉన్న 21 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు 3, 7 అని నిర్ధారించడం కష్టం కాదు కానీ 617 అంకెలు పొడుగున్న ఈ దిగువ చూపిన ప్రధాన సంఖ్య యొక్క కారణాంకాలు కనుక్కోవడం దరిదాపు అసంభవం:

25,195,908,475,657,893,494,027,183,240,048,398,571,429,282,126,204,032,027,777,13 7,836,043,662,020,707,595,556,264,018,525,880,784,406,918,290,641,249,515,082,18 9,298,559,149,176,184,502,808,489,120,072,844,992,687,392,807,287,776,735,971,418 ,347,270,261,896,375,014,971,824,691,165,077,613,379,859,095,700,097,330,459,748,8 08,428,401,797,429,100,642,458,691,817,195,118,746,121,515,172,654,632,282,216,869, 987,549,182,422,433,637,259,085,141,865,462,043,576,798,423,387,184,774,447,920,7 39,934,236,584,823,824,281,198,163,815,010,674,810,451,660,377,306,056,201,619,67

6,256,133,844,143,603,833,904,414,952,634,432,190,114,657,544,454,178,424,020,924,616,515,723,350,778,707,749,817,125,772,467,962,926,386,356,373,289,912,154,831,438,167,899,885,040,445,364,023,527,381,951,378,636,564,391,212,010,397,122,822,120,720,357

అంతర్జాలంలో వార్తలని, దత్తాంశాలని సురక్షితంగా పంపడానికి ఈ లక్షణం బాగా ఉపయోగపడుతుంది. ఉదాహరణకి మీ క్రెడిట్ కార్డు వివరాలు అంతర్జాలం మీద పంపినప్పుడు ఆ సంఖ్య ఇతరులకి తెలియకుండా జాగ్రత పడాలి కదా. అటువంటి సందర్భంలో ఈ ప్రధాన కారణాంకాలు ఉపయోగపడతాయి. ప్రధాన సంఖ్యలు మన జీవితంలో ఉపయోగపడే సందర్భం ఇదొకటి అని చెప్పుకోడానికి ఉదాహరణగా ఈ విషయం ప్రస్తావించవచ్చు.

21. ప్రధాన సంఖ్యలలో కవలలు

కేవలం ఆకర్షణీయంగా మాత్రమే ఉండి, భార్యకి ఉండవలసిన ఇతర లక్షణాలు (కార్యేషు మంత్రీ, క్షమయా ధరిత్రీ, వగైరా) మరేవీ లేని వ్యక్తిని ఇంగ్లీషులో "ట్రోఫీ వైఫ్" (trophy wife) అంటారు. ఇదే విధంగా "పనికొచ్చే లక్షణాలు" లేని ఒక గణితశాస్త్ర విభాగం ఉంది. దానిని శుద్ధ గణితం (pure mathematics) అంటారు. ఇందులో "బొత్తిగా పనికిమాలిన" శాఖ మరొకటి ఉంది. దానిని సంఖ్యా గణితం (number theory) అంటారు. సంఘంలో ట్రోఫీ వైఫ్ ఎలాంటిదో గణితంలో సంఖ్యా గణితం అలాంటిదని కొందరు చమత్కరిస్తారు. గణితంలో సంఖ్యా గణితాన్ని అధ్యయనం చేసేవారు సౌందర్యోపాసకులు. ఆ గణితంలో వారి కంటికి కనిపించే అందమే వారికి ఆనందదాయికం. ఈ శాఖలో ఉన్న మరొక ఉపశాఖని ప్రధాన సంఖ్యలు (prime numbers) అంటారు. ఈ ప్రధాన సంఖ్యలు ఎందుకు, ఎవ్వరికి, ఎక్కడ, ఎలా ఉపయోగపడతాయో చెప్పడం కష్టం. కాని ఈ ఉపశాఖలో కనబడే అందం మరెక్కడా లేదేమో అనిపిస్తుంది. గణితంలో ప్రావీణ్యం లేని వారు కూడ, గణితపు లోతులని తరచి చూసే సామర్ధ్యం లేని వారు కూడ ఈ ప్రధాన సంఖ్యల అందచందాలని చవి చూడకపోతే జీవితంలో ఒక వెలితి మిగిలిపోయినట్లే. అదృష్టవశాత్తు ఈ ప్రధాన సంఖ్యలలోని అందచందాలని చవి చూసి ఆనందించడానికి గణితం లోతుల్లోకి అతిగా వెళ్ళనక్కరలేదు.

1 అసాధారణ సంఘటన

ఈ అంశాన్ని ఇప్పుడు, ఇక్కడ ప్రస్తావించడానికి ఒక కారణం ఉంది. ఈ మధ్య, అనగా, సా. శ. 2013 లో, గణిత ప్రపంచంలో ఒక అసాధారణమైన సంఘటన జరిగింది. ఇది ఎన్నో విధాలుగా అసాధారణం. క్రీడా రంగంలో ప్రతిభ యువ తరానికి ఎలా పరిమితమో అదే విధంగా గణిత రంగంలో ప్రతిభ బాల్యానికీ, యువతకీ పరిమితం. గణితంలో పేరు ప్రతిష్టలు తెచ్చుకున్న వాళ్లంతా చిన్నతనంలోనే వికసించి పరిమళించేరు. ఒక గౌస్ అనండి, ఒక రామానుజన్ అనండి, ఒక మంజుల్ భార్గవ అనండి – వీరంతా పాతికేళ్లు నిండే లోపునే ప్రపంచ ప్రఖ్యాతి పొందేరు. ఉదాహరణగా 1985 లో తీసిన ఈ దిగువ ఫొటోలో (బొమ్మ 1 చూడండి) కొమ్ములు తిరిగిన పాల్ ఎర్డిష్ (Paul Erdős) కేవలం 10 ఏళ్ల టెరెన్స్ టావ్ (Terrance Tao) తో గణితంలో ఎదురయే ఒక సూక్ష్మాన్ని చర్చిస్తూన్న దృశ్యం చూడండి. దరిమిలా, 2007 లో, టావ్ కి, అతను సంఖ్యాశాస్త్రంలో చేసిన పనికి గుర్తింపుగా,

ప్రతిష్టాత్మకమైన ఫీల్డ్స్ మెడల్ (Fields Medal) వచ్చింది. ఈ బాల మేధావి ఇప్పుడు కేలిఫోర్నియా విశ్వవిద్యాలయం, లాస్ ఏంజిలిస్ లో, ఆచార్య పదవి అలంకరించి ఉన్నాడు.

బొమ్మ 1 ఎర్డిష్ తో దీర్ఘ చర్చలో ఉన్న బాల టెరెన్స్ టావ్

ఇలా పరిమళించిన వారంతా పాతిక, ముప్పయి సంవత్సరాల లోపునే వారు చేరుకోవలసిన శిఖరాగ్రాలు చేరుకున్నారు. ఏభయ్యేవ పడి దాటిన తరువాత గణిత శాస్త్రపు పురోగతికి దోహదం చేసిన వ్యక్తులు దరిదాపుగా లేరనే చెప్పాలి. అటువంటిది, 2013 లో, ఏభయ్ ఏళ్లు దాటిన "వయోవృద్ధుడు," అంతవరకు గణిత ప్రపంచానికి బొత్తిగా పరిచయం లేని ఒక "అనామకుడు," చదువు అయిన తరువాత ఉద్యోగం దొరకక చిల్లర పనులు చేసి పొట్ట నింపుకున్న ఒక "అప్రయోజకుడు" అకస్మాత్తుగా తారాపథంలో నవ్యతారలా ఒక్క వెలుగు వెలిగిపోయి అందరినీ ఆశ్చర్యచకితులని చేసిన వయినం ఇక్కడ చెప్పబోతున్నాను.

మన కథానాయకుడి పేరు ఈటాంగ్ జాంగ్ (జ. 1955). చైనాలో ఉన్నత పాఠశాలలో ఉన్నప్పుడు ఆల్జీబ్రా ని చూసి గాండ్ గాభరా చెందిన ఈ వ్యక్తి పర్డ్యూ (Purdue) యూనివర్సిటీ నుండి 1991 లో పి.

ఎచ్. డి. పట్టా పుచ్చుకున్నాడు. ఆయనకి మార్గదర్శిగా ఉన్న ఆచార్యుడితో స్పర్థలు వచ్చిన కారణంగా, "రికమెండేషన్" ఉత్తరం లేనందువల్ల జాంగ్ కి ఎక్కడా ఉద్యోగం దొరకలేదు. ఈ పంచనీ ఆ పంచనీ చేరి పొట్టపోసుకుంటూ తాడు తెగిన గాలిపటంలా ఉన్న జాంగ్ ని చూసి జాలిపడి ఒక స్నేహితుడు యూనివర్సిటీ అఫ్ నూ హేంప్ షైర్ లో, 1999 లో, లెక్చరర్ ఉద్యోగం ఇప్పించేడు. అక్కడ "కేలుక్యులస్" పాఠాలు చెప్పుకుంటూ, 2001 లో ఒక పరిశోధనా పత్రం ప్రచురించేడు కాని అది ఆయన, ఆ పత్రికా సంపాదకుడు తప్ప మరెవ్వరూ చదివిన దాఖలాలు లేవు. తరువాత 2013 లో ప్రచురించిన రెండవ పత్రంతో దిక్కులు పిక్కటిల్లేలా జాంగ్ పేరు గణిత ప్రపంచంలో మారుమోగిపోయింది. జాంగ్ పరిష్కరించిన సమస్యని **<u>నియమిత విరామ సమస్య</u>** (the bounded gap problem) అని పిలుస్తారు. ఇది ప్రధాన సంఖ్యల అధ్యయనంలో తారసపడే అతి క్లిష్టమైన సమస్య. పరిష్కారం లేకుండా రెండు శతాబ్దాల నుండి వేధిస్తూన్న సమస్య!

2 ప్రధాన (అభాజ్య) సంఖ్యలు

<u>ప్రధాన సంఖ్యలు</u> (prime numbers) అనేవి 1 చేత గాని, తమ చేతే కాని మాత్రమే నిశ్శేషంగా భాగించడానికి లొంగేవి అని నిర్వచనం. ఉదాహరణకి 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., వగైరాలన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలే. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే ప్రధాన సంఖ్యలకి భాజకాలు (divisors) లేవు. ఈ నిర్వచనంతో సరి సంఖ్యలు (2 తప్ప) ప్రధాన సంఖ్యలు కావు. అదే విధంగా 3 చేత, 4 చేత, 5 చేత, ..., భాగించబడేవి ఏవీ ప్రధాన సంఖ్యలు కాజాలవు. ఇలా మినహాయించుకుంటూ పోగా మిగిలేవే ప్రధాన సంఖ్యలు.

వీటి గురించి పురాతన కాలంలో గ్రీకులకి తెలుసు. పైథాగరస్ (Pythagoras) కాలంలో (క్రీ. పూ. 500 – 300) వీటికి ఒక రకం పవిత్రత అంటగట్టేరు. సంఖ్యలలో ప్రత్యేక లక్షణాలు ఉన్న <u>పరిపూర్ణ సంఖ్యలు</u> (perfect numbers) అన్నా, <u>సామరస్య సంఖ్యలు</u> (amicable numbers) అన్నా గ్రీకులకి మరింత మక్కువ.

పరిపూర్ణ సంఖ్యకి 6 ఒక ఉదాహరణ. ఈ 6కి మూడు <u>కారణాంకాలు</u> (factors or divisors), అనగా 1, 2, 3 ఉన్నాయి కదా. ఈ మూడింటిని కూడగా మళ్లా 6 వచ్చేస్తుంది. ఇదే విధంగా 28 కూడ పరిపూర్ణ సంఖ్యే. ఎందుకంటే 28కి 1, 2, 4, 7, 14 కారణాంకాలు; వీటిని కూడగా 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 వచ్చేసింది. రెండు సంఖ్యలు సామరస్య సంఖ్యలు అవాలంటే ఒక దాని కారణాంకాలని కలిపితే

రెండవ సంఖ్య వస్తుంది. ఉదాహరణకి 220, 284 అనే జంట సామరస్య సంఖ్యలు అని చెబుతున్నాను. చదువరులు లెక్క వేసి సరి చూసుకోగలరు.

యూక్లిడ్ రోజుల నాటికి (క్రీ. పూ. 300) ప్రధాన సంఖ్యల గురించి మనకి ఎన్నో విషయాలు తెలిసిపోయాయి. యూక్లిడ్ తన “ఎలిమెంట్స్” తొమ్మిదవ పుస్తకంలో ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతమైనన్ని ఉన్నాయని రుజువు చేసేడు. యూక్లిడ్ అంకగణితానికి మూల స్తంభం అనదగ్గ మరొక సిద్ధాంతాన్ని కూడ రుజువు చేసేడు: ప్రతి పూర్ణాంకాన్ని (1 ని మినహాయించి) ఏకైక ప్రధాన సంఖ్యల లబ్దం (product) గా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి 6 = 2 x 3. మరొక ఉదాహరణ 42 = 2 x 3 x 7. కాని 60 కి 2, 3, 10 ప్రధాన కారణాంకాలు కావు. కానీ 60 ని కూడ ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయవచ్చు: 60 = 2 x 2 x 3 x 5. నిజానికి “ఏ పూర్ణ సంఖ్యని అయినా సరే కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్దంగా రాయవచ్చు” అని రుజువు చెయ్యవచ్చు.

రెండు ప్రధాన సంఖ్యలని – ఎంత పెద్దవైనా సరే – కనుక్కోవడం పెద్ద కష్టం కాదు కాని, ఒక సంఖ్యకి ప్రధాన సంఖ్యలయిన కారణాంకాలు (prime factors) కనుక్కోవడం చాల కష్టం. అంతర్జాలంలో వార్తలని సురక్షితంగా పంపడానికి ఈ లక్షణం బాగా ఉపయోగపడుతుంది. వివరాలు చెప్పుకుంటూ పోతే దారి తప్పుతాం. ప్రధాన సంఖ్యలు మన జీవితంలో ఉపయోగపడే సందర్భం ఇదొకటి అని చెప్పుకోడానికి ఉదాహరణగా ఈ విషయం ప్రస్తావించేను.

క్రీ. పూ. 200 నాటికి ఇరాటోస్తనీస్ (Eratosthenes) అనే గ్రీకు ఆసామీ అంకెలన్నిటిని “ఒక <u>జల్లెడలో</u> వేసి జల్లిస్తే” పైన ప్రధాన సంఖ్యలు మాత్రమే మిగిలే పద్ధతిని కనిపెట్టేడు. తరువాత 17 వ శతాబ్దం వచ్చే వరకు ప్రధాన సంఖ్యల గురించి కొత్త విషయాలు ఏవీ ఎవ్వరూ ఆవిష్కరించలేదు. అదొక అంధకార యుగం. తరువాత ప్రధాన సంఖ్యల దశ మళ్లా పుంజుకుంది. ఈనాటి వరకు మనకి తెలిసిన విషయాలు అన్నీ స్మరించుకుంటూ పోడానికి ఇది స్థలమూ కాదు, వేళా కాదు. కాని కొన్ని ముఖ్యమైన విషయాలని టూకీగా చెప్పుకొస్తాను.

3 నియమిత విరామ సమస్య (Bounded Gap Problem)

ఒక సరళరేఖ మీద సమాన దూరాలలో చుక్కలు పెట్టి, వాటి పక్క 0, 1, 2, 3, ..., అనుకుంటూ నిర్విరామంగా వచ్చే సంఖ్యలని సూచించినప్పుడు దానిని "సంఖ్యా రేఖ" (number line) అంటారు.

ఈ సంఖ్యా రేఖ మీద ప్రధాన సంఖ్యలని, మాటవరసకి, ఎర్ర రంగులో రాసేం అనుకుందాం. అప్పుడు గీత మొదట్లో చాల ఎర్ర రంగు సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 47 అనే పదహారు సంఖ్యలు 50 కంటె చిన్నవయిన ప్రధాన సంఖ్యలు. సంఖ్యా రేఖ మీద వంద వరకు వెళితే, అంటే 1 నుండి 100 మధ్యలో, ఇరవై అయిదు ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. లెక్కించి చూసుకొండి. వెయ్యి వరకు వెళితే 168 ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి. అంటే, సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపించడం పలచబడుతుంది, లేదా ప్రధాన సంఖ్యల సాంద్రత తగ్గుతుంది. ఈ పలచబడడం గురించి చిన్న ఉపమానం చెబుతాను.

ఉదాహరణకి ప్రధాన సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలతోటే వివాహాలు చేసుకుంటాయని అనుకుందాం. అప్పుడు సంఖ్యా రేఖ మొదట్లో ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలకి సంబంధాలు దొరకడం తేలిక - పక్క పక్కనే సంబంధాలు దొరుకుతాయి. సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యలు పలచబడతాయి కనుక అక్కడ ఉన్న వారు సంబంధాలకోసం ఇరుగునా, పొరుగునా చూస్తే దొరకడం కష్టం; కావలసిన లక్షణాలు ఉన్న సంబంధం కోసం “దేశాంతరాలు” దాటి పోవాలి. ఉదాహరణకి "గూగోల్ ప్లెక్స్" (అంటే, 10 గూగోల్ సార్లు వేసి గుణించగా వచ్చిన సంఖ్య) దగ్గర ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యకి సంబంధం కావాలంటే ఇటూ, అటూ "గూగోల్" దూరం వెతక వలసి రావచ్చు. (గూగోల్ అంటే 1 తరువాత 100 సున్నలు, "గూగోల్ ప్లెక్స్" అంటే 1 తరువాత గూగోల్ సున్నలు.)

ఇక్కడ గమనించవలసిన విషయం ఏమిటంటే సంఖ్యా రేఖ మీద అనంతమైన దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయన్నది ఒక అంశం. అంతే కాదు అనంతంగా ఉన్న పూర్ణ సంఖ్యలన్నిటిని కేవలం ప్రధాన సంఖ్యలు మాత్రమే ఉపయోగించి పుట్టించవచ్చు. (The whole number line can be produced using nothing but primes.) ఇటువంటి లక్షణాలు ఉండబట్టే ఈ క్షేత్రాన్ని దున్నుతూన్న కొద్దీ వజ్రాలు పుట్టుకొస్తున్నాయి.

ఇప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేకమైన ప్రధాన సంఖ్యల పేర్లు చెబుతాను. వీటి వెనక ఉండే గణిత సూత్రాలు, రుజువులు అర్థం కాకపోయినా పరవా లేదు.

(1) ప్రధాన సంఖ్యలు (2 ని మినహాయించి) అన్నీ బేసి సంఖ్యలే.

(2) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 2 అయితే వాటిని "కవల ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా "కవలలు" (twins) అంటారు. ఉదా: (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); వగైరా. ఈ వరుస క్రమంలో తరువాత వచ్చే కవలలు మరి కొన్ని చెప్పుకోగలరా? ప్రయత్నించండి, కష్టం కాదు.

(3) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 4 అయితే వాటిని "జ్ఞాతి ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా జ్ఞాతులు (cousins) అంటారు. ఉదా: (3,7); (7,11); (13,17). మరికొన్ని మీరు రాసి చూడండి.

(4) రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం 6 అయితే వాటిని "షష్ఠ్యంతర ప్రధాన సంఖ్యలు" అనొచ్చు. లేదా షష్ఠ్యంతరాలు. లేటిన్ లో 6 ని sex అంటారు కనుక వీటిని ఇంగ్లీషులో "sexy ప్రధాన సంఖ్యలు" అంటారు. ఉదా: (5, 11); (7, 13); (11,17). మరి కొన్ని షష్ఠ్యంతరాలు మీరు రాసి చూడండి.

కవలలనీ, జ్ఞాతులనీ, షష్ఠ్యంతరాలునీ, ..., వగైరాలని గుత్తగుచ్చి "జంట" ప్రధాన సంఖ్యలు అనొచ్చు. ఇక్కడ "కవల" కీ "జంట" కీ తేడా ఉంది. జంట ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య దూరం మనం నిర్దేశించి చెప్పవచ్చు కాని "కవల" సంఖ్యల మధ్య దూరం ఎప్పుడూ రెండే.

కాలక్షేపానికీ, మరికొన్ని ఆసక్తికరమైన విషయాలు:

(5) ఒక ప్రధాన సంఖ్యలో ఉన్న అంకెలని ఏ విధంగా అమర్చినా తిరిగి ప్రధాన సంఖ్యే వస్తే వాటిని నిరపేక్ష (absolute) ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు. ఉదా: 199, 919, 991. వెయ్యి లోపున 21 నిరపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, వగైరా. మిగిలిన తొమ్మిదింటిని మీరు కనుక్కోండి.

(6) కచిక (palindrome) ప్రధాన సంఖ్యకి ఒక ఉదాహరణ: 700666007. ఇది ఎటు నుండి చదివినా ప్రధాన సంఖ్యే! మధ్యలో 666 ఉండడం వల్ల దీనిని "సైతాను" (beastly) ప్రధాన సంఖ్య అని కూడ అంటారు. (క్రైస్తవ మతంలో సైతానుని 666 తో సూచిస్తారు.)

(7) ఒక సంఖ్యలో అంకెలని గుండ్రంగా చక్రంలా అమర్చిన తరువాత ఎక్కడనుండి చదివినా ప్రధాన సంఖ్యే వస్తే దానిని చక్రీయ (cyclic) ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదా: 1193, 1931, 9311, 3119 అనేవి నాలుగంకెల చక్రీయ ప్రధాన సంఖ్యలు.

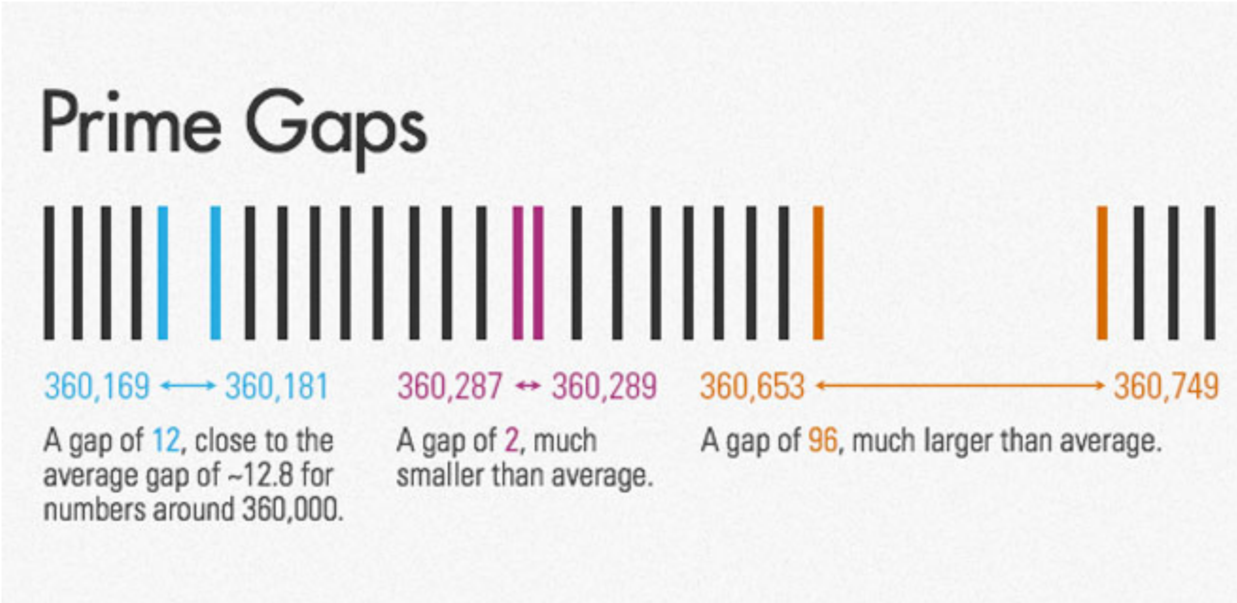
(8) ఒక సంఖ్యలో అన్నీ గుండ్రటి ఒంపు తిరిగిన అంకెలు (అనగా 0, 3, 6, 9) మాత్రమే ఉంటే దానిని ఒంపుల ప్రధాన సంఖ్య (curved-digit prime) అంటారు.

(9) ఒక ప్రధాన సంఖ్యలో అంకెలని ఒకటీ, ఒకటీ మినహాయించుకుంటూ పోతూన్నప్పుడు మిగిలినది ప్రధాన సంఖ్యే అయితే దానిని "మినహాయింపు" (deletable) ప్రధాన సంఖ్య అంటారు. ఉదా: 1997. ఎడమ పక్క నుండి వరుసగా 1, 9, 9 మినహాయించగా మిగిలిన 997, 97, 7 ప్రధాన సంఖ్యలు.

(10) "క్యూబన్" (Cuban) ప్రధాన సంఖ్యలకీ, క్యూబా దేశానికి ఏ విధమైన సంబంధము లేదు. ఇక్కడ "క్యూబన్" అంటే "క్యూబ్" (cube) కి సంబంధించిన అని అర్థం. వీటిని మనం "ఘన ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా ఘనాపాటీలు అనో అనొచ్చు.

ఇలా సరదా కబుర్లు చాల సేపు చెప్పుకోవచ్చు కాని ముందుకి కదులుదాం.

ఈ వ్యాసానికి ముఖ్య కారణం చర్చించే ముందు మరొక్క సంగతి తెలుసుకుందాం. సంఖ్యా రేఖ మీద దూరం వెళుతూన్న కొద్దీ ప్రధాన సంఖ్యల తరచుదనం (frequency) లేదా సాంద్రత (density) తగ్గిపోతుంది అని కదా మొదట్లో చెప్పుకున్నాం; అంటే, వాటి మధ్య ఖాళీ లేదా మొర్రి లేదా విరామం (gap) పెరుగుతూ కనిపిస్తుంది. ఈ పెరుగుదలలో ఏదైనా ఒక బాణీ ఉందా అనేది ఆసక్తికరమైన పరిశోధనా అంశమే! ప్రస్తుతానికి ఆ విషయాన్ని కూడ పక్కకి పెట్టి మరొక సంబంధిత అంశాన్ని పరిశీలిద్దాం. సిద్ధాంతపరంగా లెక్క కట్టినప్పుడు 360,000 చుట్టుపట్ల ఈ విరామం సగటున 12.8 "అంకెల దూరం" ఉంటుంది. (గణిత పరిభాషలో చెప్పాలంటే, ఒక సంఖ్య N అయితే ఆ చుట్టుపట్ల విరామం విలువ సగటున "నేచురల్ లాగరిథం అఫ్ N," (ln N), అయి ఉంటుంది.) అనగా, ఎక్కడ చూసినా ఈ సగటు విలువ కంటె ఎక్కువలు, తక్కువలు కూడ కనిపిస్తూనే ఉంటాయి. ఉదాహరణకి సంఖ్యా రేఖ మీద 360,000 చుట్టుపట్ల వచ్చే ఈ ప్రధాన సంఖ్యల జంటలని చూడండి: బొమ్మ 2 కూడ చూడండి.



బొమ్మ 2 ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం

(1) 360,169 & 360,181 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 12. ఇది సగటుకి దగ్గరగా ఉంది.
(2) 360,287 & 360,289 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 2. కనుక ఇవి కవలలు. ఈ విరామం సగటు కంటె బాగా తక్కువగా ఉంది.
(3) 360,653 & 360,749 అనే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య విరామం విలువ 96. ఈ విరామం సగటు కంటె బాగా ఎక్కువగా ఉంది.

కనుక ప్రధాన సంఖ్యల గురించి ఏది చెప్పినా ఆషామాషీగా చెబితే కుదరదు; కొంచెం జాగ్రత్తగా చెప్పాలి.

సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయని యూక్లిడ్ ఏనాడో అన్నాడు కదా. కాని ఆయన కవల ప్రధాన సంఖ్యల గురించి ఏమీ చెప్పలేదు. గణితశాస్త్రంలో ఒక శిష్టాభిప్రాయం (conjecture) – అంటే, ఇంకా రుజువు కాని ఫలితం – ప్రకారం ఇటువంటి కవల ప్రధాన సంఖ్యలు కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయిట. ఆ మాటకొస్తే జ్ఞాతి ప్రధాన సంఖ్యలు, షష్ఠ్యంతర ప్రధాన సంఖ్యలు,....., వగైరాలు కూడ సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయిట.

ఇప్పుడు మే నెల 2013 లో ఈటాంగ్ జాంగ్ ఈ దిశలో అధిరోహించిన శిఖరం గురించి తెలుసుకుందాం. ఈయన ఆవిష్కరించిన కొత్త విషయం ఏమిటంటే సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా "ప్రధాన సంఖ్యలు 'వాటి మధ్య కనిపించే విరామం (gap) ఒక పరిమితమైన అవధి దాటకుండా' అలా కనిపిస్తూనే ఉంటాయి" అని. ఎన్నిట? అనంతమైనన్ని! (ఈ ఫలితాన్ని ఇంగ్లీషులో, The number of prime pairs that are less than a bound apart is infinite అని రాయవచ్చు.) దీని సారాంశం అర్థం కావాలంటే గణిత శాస్త్రపు లోతులలోకి కొద్దిగానైనా వెళ్లాలి. సంఖ్యా రేఖ మీద ఎంత దూరం వెళ్లినా ప్రధాన సంఖ్యలు కనిపిస్తూనే ఉంటాయి అన్న విషయం మనందరికీ తెలిసిన విషయమే. ఇప్పుడు జాంగ్ వచ్చి "ఒక ప్రధాన సంఖ్యకి, దాని తరువాత కనిపించే ప్రధాన సంఖ్యకి మధ్య వచ్చే విరామం నియమితం ' (bounded) అని అన్నారు. అంటే, ఎంత దూరం వెళ్లినా ఆ ఖాళీ విలువ ఒక అవధి దాటకుండా పరిమితంగానే ఉంటుంది కాని ఎప్పటికీ అనంతం కాదు. ఇంకా నిర్ధిష్టంగా చెప్పాలంటే, ఆ విరామం విలువ 70,000,000 దాటదు." ఇది సామాన్యులకి అందుబాటు కాని విషయమే అయినా గణిత ప్రపంచంలో పతాక శీర్షిక అయి కూర్చుంది.

బొమ్మ 3 ఈటాంగ్ జాంగ్

జాంగ్ చూపించిన దారి వెంట తర్కించుకుంటూ వెళితే మరొక ఉపయుక్తమైన ఫలితం వెంటనే దొరికింది. పైన చెప్పిన అనంతమైన శ్రేఢిలో వచ్చే ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య వచ్చే విరామానికి ఒక గరిష్ఠ అధో అవధి (greatest lower bound లేదా infimum) ఉందిట. అది 70,000,000 కంటె ఖచ్చితంగా తక్కువేనట. (అనగా, ఇంగ్లీషులో చెప్పాలంటే the number of prime pairs that are less than 70 million units apart is infinite.) ఇదే విషయాన్ని గణిత పరిభాషలో మళ్లా చెబుతాను. p_n, p_{n+1} అనేవి ఒకదాని తరువాత మరొకటి వచ్చేవి అయిన రెండు ప్రధాన సంఖ్యలు అనుకుందాం. అప్పుడు

$p_{n+1} – p_n = g_n$ అనేది ఈ రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మధ్య ఉండే విరామం (gap). ఈ విరామం విలువ అనంతం కాదు అన్నది మొదటి ఫలితం. ఈ విరామం విలువ 70 మిలియన్లు కంటె తక్కువ అన్నది విశేషాంశం. ఈ సందర్భంలో ఈ 70,000,000 ని అవధి (bound) అంటారు. ఇదే విషయాన్ని గణిత పరిభాషలో ఈ దిగువ అసమీకరణం (inequality) ద్వారా చెప్పవచ్చు: limit as *n* goes to infinity of the infimum of g_n is less than 70 million. ఇదే విషయాన్ని సంప్రదాయిక గణిత పరిభాషలో రాసినప్పుడు బొమ్మ 4 లో చూపినట్లు ఉంటుంది:

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) < N \quad \text{with} \quad N = 7 \times 10^7,$$

బొమ్మ 4. ఈటాంగ్ జాంగ్ సాధించిన ఫలితం

ఈ ఫలితాన్ని మరొక విధంగా చెప్పి చూస్తాను. ఒక అవధిని తీసుకొని, సంఖ్యలను ఎంత పెంచుకొంటూ పోయినా, తమ మధ్య దూరం ఆ అవధిని మించకుండా ఉండే ప్రధాన జంటలు దొరుకుతాయా లేదా అన్నది ఇక్కడి ప్రశ్న. దొరుకుతాయి అన్నది జాంగ్ నిరూపించారు. ఆ అవధి 70,000,000 కన్నా తక్కువని కూడా నిరూపితమైంది.

గణితంలో ఇటువంటి అవధులని నిర్ణయించడం చాల ముఖ్యమైన పని. ఈ ఫలితాన్ని ఆసరాగా చేసుకుని మరికొందరు ఈ అవధి (bound) ని 246 కి, తరువాత 16 కి కుదించగలిగేరు. అనగా, ఆ అవధి 16 కన్నా తక్కువ అని కూడా నిరూపించారు! అంటే ఎంత పెద్ద సంఖ్య తీసుకొన్నా, ఆ సంఖ్య కన్నా పైన – '16 కంటె తక్కువ దూరం ఉన్న' ప్రధాన జంటలు మనకి దొరుకుతాయి.
మరెవ్వరైనా ఈ అవధిని 2 కి కుదించగలిగితే ఎప్పటినుంచో వాడుకలో ఉన్న కవల ప్రధాన సంఖ్యల శిష్టాభిప్రాయం (Twin Prime Conjecture) నిజం అవుతుంది. ఏమిటా శిష్టాభిప్రాయం? కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అన్నది.

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అని నిర్ణయం జరిగిపోతే అదే తర్కంతో జ్ఞాతులు, షష్ఠ్యంతరాలు, వగైరాలు అన్నీ కూడ అనంతమే అని రుజువు చెయ్యటం తేలిక. అంటే, మీరు ఏ సరి సంఖ్య ఇచ్చినా సరే ఆ సంఖ్య నిర్దేశించిన దూరంలో ఉండే జంట ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అన్న మాట!

కుతూహలం ఉన్న వారికి:

$2996863034895 \, x \, 2^{1290000} \pm 1$ అనేవి కవల ప్రధాన సంఖ్యలకి ఒక ఉదాహరణ.

2,003,663,613 × $2^{195,000}$ − 1 మరియు 2,003,663,613 × $2^{195,000}$ + 1 అనేవి కవల ప్రధాన సంఖ్యలకి మరొక ఉదాహరణ.

అలాగే 3,756,801,695,685 x $2^{666,689}$ -1 మరియు 3,756,801,695,685 x $2^{666,689}$ -1 అనేవి కవలలకి మరొక ఉదాహరణ.

ఇంత కథా చెప్పి జాంగ్ ఈ ఫలితాన్ని ఎలా సాధించేరో చెప్పనేలేదు కదూ? ఇరాటోస్తనీస్ (Eratosthenes) జల్లెడ వంటి సాధనాన్నే ఈయనా ఉపయోగించేరు. ఇంకా లోతుకి దిగదలుసుకున్న వారు కావలసిన వారు ఈ దిగువ ఇచ్చిన ఆధారాలు చదవండి.

ఆధారాలు:

1. Maggie McKee, “First proof that infinitely many prime numbers come in pairs: Mathematician claims breakthrough towards solving centuries-old problem,” *Nature: Breaking News*, 14 May 2013

2. Zhang, Yitang. "Bounded gaps between primes," *Annals of Mathematics* (Princeton University and the Institute for Advanced Study). Retrieved August 16, 2013. http://annals.math.princeton.edu/2014/179-3/p07

3. Erica Klarreich, “Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap,” *Quanta Magazine*, May 19, 2013

4. Jordan Ellenberg, The Beauty of Bounded Gaps: A huge discovery about prime numbers — and what it means for the future of mathematics, *Math Horizons*, Sep 2013, pp 5-7, www.maa.org/mathhorizons

5. Erica Klarreich, “Mathematicians Make a Major Discovery About Prime Numbers,” *Quanta Magazine*, Dec 22, 2014

6. Alec Wilkinson, “The Pursuit of Beauty: Yitang Zhang Solves a Pure-math Mystery,” *The New Yorker*, Feb 2, 2015

6. ఉపాధ్యాయుల వేంకట సత్యనారాయణ, "కచిక పదాలు," తెలుగు వెలుగు, తానా సభల ప్రత్యేక జ్ఞాపిక, పుటలు 105-107, 1985

కృతజ్ఞతలు:
ఈ వ్యాసం ఈమాట జాల పత్రికలో (July 2015) ప్రచురితమైనది
ఈ వ్యాసం ప్రచురణ అయే ముందు సంపాదకుడు అందించిన సహాయానికి, ప్రచురణ పొందిన తరువాత పాఠకుల నుండి వచ్చిన అనూహ్యమైన స్పందన నన్ను చకితుణ్ణి చేసింది. నా వ్యాసాన్ని చదివి మెచ్చుకున్నవారందరికీ ఒకొక్క నమస్కారం; తప్పులు ఎత్తి చూపిన పాఠక వర్గానికి వెయ్యి నమస్కారాలు! కేవలం భాషానువాదానికి సంబంధించిన తప్పులని ఎత్తి చూపిన వారు కొందరైతే, గణితపరంగా, మౌలికమైన తప్పులని పట్టి, సవరించిపెట్టినవారు మరికొందరు. వీలయినంత వరకు తప్పులని సరిదిద్దేను. ఈమాట చరిత్రలో - నా అనుభవంలో - ఇటువంటి ప్రక్రియ జరగడం ఇదే మొదటిసారేమో. గణితంలోని మూల భావాలని ఇంగ్లీషు నుండి తెలుగులోనికి దింపినప్పుడు నా తెలుగులో ఇంకా వెలితి కనిపించవచ్చు. రెండు విషయాలు జ్ఞాపకం పెట్టుకోమని పాఠకలోకానికి మనవి. ఒకటి, ఇది గణితంలో నిష్ణాతులైన పండితులని ఉద్దేసించి రాసినది కాదు; సామాన్య పాఠకులకి అర్థం అయే రీతిలో పదార్థాన్ని పరిచయం చెయ్యాలని చేసిన ప్రయత్నం. రెండు, తెలుగులో ఇటువంటి వ్యాసాలు రాయడానికి ఒరవడి అంటూ ఒకటి స్థిరపడలేదు. కనుక చదువుతూన్నప్పుడు మీకు కనిపించే లొసుగులు రాస్తున్నప్పుడు నాకు కనిపించవు. అందుకని పాఠకులందరూ ఇదే నిష్ఠతో నా వ్యాసాలని చదివి మీమీ అమూల్య అభిప్రాయాలు తెలియజేస్తూ ఉండండి.

22. అంకెలు, సంఖ్యలు అతని సంగడికాళ్ళు

గణితంలో "నభూతో నభవిష్యతి" అనిపించుకున్న మహా మేధావి శ్రీనివాస రామానుజన్ లండన్ లో ఉన్న రోజులలో, "అంకెలు అతని సంగడికాళ్ళు" అన్నాడుట లిటిల్‌వుడ్ అనే పేరుమోసిన మరొక గణిత శాస్త్రవేత్త. సంగడికాడు అంటే స్నేహితుడు. స్నేహితులతోటీ, బొమ్మలతోటీ పిల్లలు ఆడుకున్నట్లే, రామానుజన్ అంకెలతో ఆడుకునేవాడని తాత్పర్యం.

1 టేక్సీ సంఖ్యలు

ఒక సారి జబ్బుతో మంచం పట్టి ఉన్న రామానుజన్‌ని చూడటానికి ప్రొఫెసర్ హార్డీ టేక్సీ చేయించుకుని వెళ్ళేరుట. ఆ టేక్సీ మీద ఉన్న 1729 ని చూసి అది "చాల చప్పగా ఉన్న సంఖ్యలా అనిపించింది" అన్నారుట, హార్డీ. "అయ్యయ్యో! అది చప్పనైనదేమీ కాదు, చాల ఆసక్తికరమైన సంఖ్య. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం రెండు విధాలుగా రాయగలిగే సంఖ్యలన్నిటిలోను ఇది అతి చిన్నది" అని ఠక్కున సమాధానం ఇచ్చేరుట, రామానుజన్. ఈ గమనికని గణిత పరిభాషలో చెప్పవచ్చు: 1729 అనే సంఖ్య 1 నీ 12 నీ విడివిడిగా ఘనీకరించి ఆ లబ్దాలని కలిపినా వస్తుంది, లేదా 9 నీ 10 నీ విడివిడిగా ఘనీకరించి ఆ లబ్దాలని కలిపినా వస్తుంది. (ఇదే విషయాన్ని ఈ దిగువ చూపిన గణిత సమీకరణం రూపంలో చూడండి. ఇక్కడ ^ ఘాతానికి, * గుణకారానికి గుర్తులు.)

1729 = 1^3 + 12^3 లేదా 1729 = 10^3 + 9^3

అనగా

1729 = 1*1*1 + 12*12*12 = 10*10*10 + 9*9*9.

బొమ్మ 1. 1729 ని రెండు విధాలుగా రాయటం ఎలాగో చూపిస్తున్నాను

ఒకే అంశాన్ని (అంకెని కానీ, చలనరాసిని కానీ) రెండు సార్లు వేసి గుణిస్తే వచ్చిన దానిని వర్గు అనీ, మూడు సార్లు వేసి గుణిస్తే వచ్చిన దానిని ఘనం అనీ అంటారు.

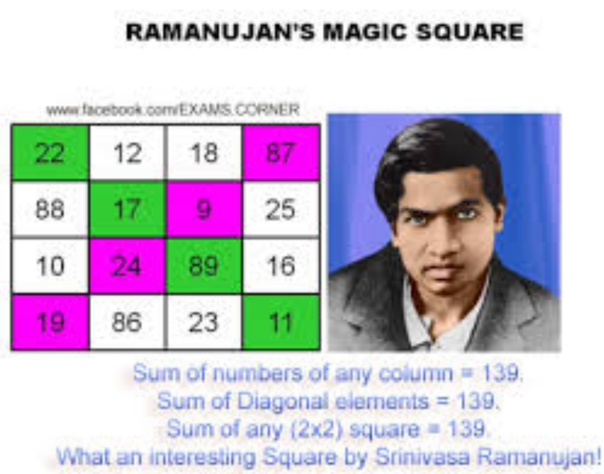
"అంకెలతో ఈ గారడీలు అన్నీ ఎలా చేయగలుగుతున్నావు?" అని ఎవరో రామానుజాన్ని అడిగితే, "నా ఇలవేలుపు నా చేత ఇలా పలికిస్తోంది" అన్నాడుట. పలికించేవాడు పలికిస్తూ ఉంటే పలికే పలుకుల్లో ప్రావీణ్యత ఉండక మరేమి ఉంటుంది? పైన చెప్పినటువంటి లక్షణం ఉన్న సంఖ్యలని “టేక్సీ సంఖ్యలు” అని అంటున్నారు. నిజానికి రామానుజన్ తో సఖ్యం చేసిన సంఖ్యలు అర్థం కావాలంటే గణితం అనే ఒక మహాసముద్రం లోనికి బాగా లోతుగా దిగాలి.

ఇటీవల పై సమస్యకి సంబంధించిన మరొక సమస్యని పరిష్కరించేరు. టేక్సీ సంఖ్యలలో అతి చిన్నది 1729 అయితే అతి పెద్దది ఏది? ఇప్పటివరకు మనకి తెలిసిన అతి పెద్ద టేక్సీ సంఖ్య 885623890831: (లెక్క వేసి చూసుకోండి)

885623890831 = 7511^3 + 7730^3 లేదా 8759^3 + 5978^3

2 రామనుజన్ చదరం

మనందరికీ సులభంగా అర్థం అయ్యే మరొక కానుక - రామానుకన్ నుండి. దీనిని రామనుజన్ చదరం అంటారు (బొమ్మ 2 చూడండి).



బొమ్మ 2. రామానుజన్ చదరం

ఈ బొమ్మలో ప్రతి అరుస (అడ్డు వరుస)లో సంఖ్యలని కూడి చూడండి. ప్రతి సారి మొత్తం 139 వస్తోంది కదా. ఇప్పుడు ప్రతి నిరుస (నిలువు వరుస)లో ఉన్న సంఖ్యలని కూడి చూడండి. ఈ మొత్తాలూ 139 తో సమానమే!

ఇప్పుడు ఏటవాలుగా ఉన్న రెండు కర్ణాల వెంబడీ ఉన్న సంఖ్యలని కూడదాం;

మొదటి కర్ణం: 22 + 17 + 89 + 11 = 139

రెండవ కర్ణం: 87 + 9 + 24 + 19 = 139

“అబ్బే! ఇందులో వింతేముంది? ఈ రకం చదరాలు ఇంతకు ముందు చూసేం” అని మీరు పెదవి విరచే లోగా మరికొన్ని విషయాలు చూడండి.

ఇప్పుడు నాలుగు మూలలో ఉన్న సంఖ్యలని కూడండి.

మూలలు: 22 + 89 + 19 + 11 = 139

ఇంకా కావాలా? ఏ ఉపచదరంలో సంఖ్యలని కూడినా 139 వస్తుంది.

మధ్యలో ఉపచదరం: 17 + 9 + 24 + 89 = 139

ఈశాన్యంలో ఉపచదరం: 18 + 87 + 9 + 25 = 139

నైరుతి ఉపచదరం: 10 + 24 + 19 + 86 = 139

ఆగ్నేయ ఉపచదరం: 89 + 16 + 23 + 11 = 139

మరి రెండు చదరాలు మిగిలిపోయాయి. అవేమిటో గుర్తుపట్టి చెప్పగలరా? ఈ చదరం ఉన్న కాగితాన్ని అడ్డుగా చుట్ట చుడితే పైనున్న రెండు గదులు, కిందనున్న రెండు గదులు కలిసి -

ఉత్తర-దక్షిణ ఉపచదరం: 12 + 18 + 86 + 23 = 139

ఇప్పుడు కాగితాన్ని నిలువుగా చుట్ట చుడితే ఎడమన రెండు గదులు, కుడిన ఉన్న రెండు గదులు కలిసి -

తూర్పు-పడమర ఉపచదరం: 88 + 23 + 12 + 18 = 139

ఈ అద్భుతం చాలనట్లు మరొక్క మహాద్భుతం ఈ చదరంలో దాగి ఉంది.

పై వరుసలో ఉన్న నాలుగు సంఖ్యలని మరొక సారి చూడండి. చూసి, ఇలా చదవండి: 22-12-1887. ఇది శ్రీనివాస రామానుజన్ జన్మ దినం!

23. అంకెలు, సంఖ్యలు: అర్థగర్భితమైన శ్లోకాలు

పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలంటే మనవాళ్ళకి బొత్తిగా భయం లేదని గతంలో ఒకసారి చెప్పేను. పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలని కుదించి చిన్న చిన్న మాటలలో చెప్పడంలో మన పూర్వీకులు దిట్టలు. సంఖ్యలని చిన్న చిన్న మాటలలో కుదించి చెప్పవలసిన అవసరం ఎందుకొచ్చిందో ముందు చెబుతాను.

కాగితాలు, ముద్రణాయంత్రాలు లేని అనాది కాలంలో మన సంస్కృతిని విజ్ఞానసంపదని తరతరాల పాటు కాపాడి మన పూర్వులు మనకి అందించేరు. మరే టెక్నాలజీ లేని రోజులలో విజ్ఞానాన్ని కంఠతా పట్టడం ఒక్కటే వారికి తెలిసిన మార్గం. మన వర్ణాశ్రమ ధర్మంలో ఈ కంఠతా పట్టే పనిని బ్రాహ్మణులకి అప్పగించేరు. కొంతమంది బ్రాహ్మణ బాలురు జీవితాంతం చెయ్యవలసిన పని ఇదే. వాళ్ళని "లివింగ్ రికార్డర్లు" అనో, సజీవ గ్రంథాలయాలు అనో అన్నా అతిశయోక్తి కానేరదు. వాళ్ళు కంఠస్థం చేసే శ్లోకాలు వాళ్లకి అర్థం అయితే మరీ మంచిది, కాని అర్థం కానక్కర లేదు. స్వరం తప్పకుండా, శబ్దదోషం లేకుండా కంఠతా పట్టడం, ఆ తర్వాత అదే విషయం కొడుకులకో, శిష్యులకో నేర్పడం. వీళ్ళు ఇలా శ్లోకాలు వల్లెవేస్తూ కూర్చుంటే కడుపు నిండేదెలా? అందుకని ఈ "ఒరల్ ట్రెడిషన్"ని రక్షించడం కొరకు రాజులు బ్రాహ్మణులని పోషించడం మొదలుపెట్టేరు. ఇలా కొన్ని శతాబ్దాల పాటు జరిగింది.

తరువాత తాటేకు మీద ఘంటంతో వ్రాయడం నేర్చుకున్నారు. తాళపత్ర గ్రంథాలతో "ఇంటింటా ఒక స్వంత గ్రంథాలయం" నిర్మించడానికి అవకాశాలు తక్కువ. కనుక కంఠస్థం చెయ్యడం అనేది మన విద్యావిధానంలో ఒక ముఖ్యాంశం అయిపోయింది. వచనాన్ని కంఠస్థం చెయ్యడం కంటె పద్యాన్ని కంఠస్థం చెయ్యడం తేలిక. అందుకనే ఆర్యభట్టు, భాస్కరాచార్యులు మొదలైన వారంతా గణితాన్ని కూడ శ్లోకాలలోనే రాసేరు. పద్యంలో బిగుతు వుండాలి. పైగా విశాలమైన భావాన్ని క్లుప్తంగా పద్యపాదంలో ఇరికించాలి. అందుకని మనవాళ్ళు ఒక సంక్షిప్త లిపి ("కోడ్")ని తయారుచేసుకున్నారు. గణితశాస్త్రంలోని సునిశితమైన విషయాలని ఆ సంక్షిప్తలిపి లోనికి మార్చి, వాటిని ఛందస్సుకి సరిపడా పద్యపాదాలలో ఇరికించేసరికి వాటిలోని గూఢార్థం మన బోంట్లకి అందుబాటులో లేకుండాపోయింది. అంతేకాని ఎవ్వరికీ తెలియకుండా విద్యని, విజ్ఞానాన్ని రహస్యంగా దాచాలనే బుద్ధి మన సంస్కృతిలో లేదు.

వేదమంత్రాల పరిస్థితి కూడ ఇటువంటిదే అయివుంటుంది. మన పురాతన గ్రంథాలని కూలంకషంగా అర్థం చేసుకోవాలంటే భాష, వ్యాకరణం అర్థమైనంత మాత్రాన సరిపోదు. వారు

కాచివడపోసిన సూత్రాలలోని గూఢార్థాలు కూడ అర్థం అవాలి. ఇలా గూఢభాషలో, లేదా సంక్షిప్తలిపిలో, రాయడం కంఠోపాఠం చెయ్యడానికి అనుకూలిస్తుందనే చేసేరు కాని విద్యని నలుగురికీ పంచిపెడితే “ఇంటలెక్చ్యువల్ ప్రోపెర్టీ”కి నష్టం వస్తుందని కాదు. ఇలా “ఇంటలెక్చ్యువల్ ప్రోపెర్టీ” వంటి ఊహలు ఎవ్వరి పుర్రెలోనైనా పుడితే వాళ్ళని నిరుత్సాహపరచడానికో ఏమో “తనకి వచ్చిన విద్యని శిష్యులకి బోధించకపోతే గురువు బ్రహ్మరాక్షసుడు అవుతాడు” అని ఒక లోకప్రవాదం కూడ లేవదీశారు.

ఇక, ఈ ఉపోద్ఘాతాన్ని కట్టిపెట్టి, ఉదాహరణకి ఆర్యభట్టీయం అనే గణితశాస్త్ర గ్రంథం లోని పన్నెండవశ్లోకాన్ని పరిశోధించి చూద్దాం.

మఖీ భఖీ ఫఖీ ధఖీ ణఖీ ఞఖీ
ణఖీ హస్ఝు స్కకీ కిష్గ ఘఖీ కిఘ్వ
ఘ్లకీ కిగ్ర హక్య ధకీ కిచ
స్గష్జ ఙ్వ క్లప్త ఫ ఛ కళార్ధ జ్యా

ఈ శ్లోకంలో ఆఖరిపదం ఒక్కటే సంస్కృతం; మిగిలిన 24 పదాలూ 24 శబ్దసముదాయాలు. వీటిలో ప్రతి శబ్దసముదాయం ఒక అంకెని కానీ సంఖ్యని కానీ సూచిస్తుంది. ఆ అంకెలన్నీ “జ్యా” అనే రేఖాగణిత భావాన్ని నిర్వచించడానికి ఉపయోగపడతాయి. మనం ఈ రోజులలో “ట్రిగొనామెట్రీ”లో వాడే “సైను” యొక్క నిర్వచనం ఈ శ్లోకంలో గూఢమైన పద్ధతిలో నిబిడీకృతమై ఉంది. ఈ పద్ధతి కూడ ఆర్యభట్టు ప్రవేశపెట్టినదే అయి ఉండవచ్చు.

తెలుగు లోనూ సంస్కృతం లోనూ 25 హల్లులని ఐదు వర్గాలుగా విడగొట్టి రాస్తాం కదా.

క, ఖ, గ, ఘ, ఙ్ లని క-వర్గు అనీ,
చ, ఛ, జ, ఝ, ఞ్ లని చ-వర్గు అనీ,
ట, ఠ, డ, ఢ, ణ లని ట-వర్గు అనీ,
త, థ, ద, ధ, న లని త-వర్గు అనీ,
ప, ఫ, బ, భ, మ లని ప-వర్గు అనీ

పిలుస్తారు. ఈ హల్లులకి 1, 2, 3, .. 25 అనే విలువలని వరుసగా ఆపాదిద్దాం. ఇదే విధంగా య లగాయతు హ వరకు ఉన్న య, ర, ల, వ, శ, ష, స, హ లకి 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 అనే విలువలని వరుసగా ఆపాదిద్దాం.

ఇక మిగిలిపోయినవి సంస్కృతంలోని అచ్చులు. వీటి విలువలు ఈ దిగువ చూపిన పద్ధతిలో ఇద్దాం. (ఇక్కడ ** ఘాతానికి గుర్తు.)

అ, ఆ: 100 ** 0 = 1
ఇ, ఈ: 100 ** 1 = 100
ఉ, ఊ: 100 ** 2 = 10 000
ఋ, ౠ: 100 ** 3 = 1 000 000
ఌ, ౡ: 100 ** 4 = 1 తర్వాత 8 సున్నలు
ఏ: 100 ** 5 = 1 తర్వాత 10 సున్నలు
ఐ: 100 ** 6 = 1 తర్వాత 12 సున్నలు
ఓ : 100 ** 7 = 1 తర్వాత 14 సున్నలు
ఔ: 100 ** 8 = 1 తర్వాత 16 సున్నలు

ఈ పద్ధతిలో లెక్కపెట్టడం ఎలాగో చూద్దాం. ముందుగా గుణింతాలని చూద్దాం. (ఇక్కడ * గుణకారానికి గుర్తు.)

క = క్ * అ = 1 * 1 = 1
కి = క్ * ఇ = 1 * (100 ** 1) = 100
గు = గ్ * ఉ = 3 * (100 ** 3) = 30 000

ఇదే విధంగా ద్విత్వాక్షరాల విలువలని పరిశీలిద్దాం.

గ్న = గ్ + న = 3 + 20 = 23
గ్ను = (గ్ + న) * ఉ = 23 * (100 ** 2)
ఖ్యుఘృ = ఖ్యు + ఘృ = (2 + 30) * (100 ** 2) + 4 * (100 ** 3) = 4 320 000

ఇలా అంకెల స్థానంలో అక్షరాలు వాడి, ఆ అక్షరాలతో మాటలు పేర్చి, ఆ మాటలతో శ్లోకాలు కూర్చి, ఆ శ్లోకాలని కంఠస్థం చేసి, మనవాళ్ళు వాళ్లకి తెలిసిన పరిజ్ఞానాన్ని మనకి అందించేరు.

ఇంతవరకు వచ్చిన తర్వాత పైన చూపిన శ్లోకానికి అర్థం చెప్పకపోతే ఏమి మర్యాదగా ఉంటుంది? ఒక వృత్తంలో నాల్గవ భాగాన్ని తురీయం అంటారు. ఇంగ్లీషులో అయితే "క్వాడ్రెంట్". ఈ తురీయంలో ఉన్న 90 డిగ్రీలని 24 సమభాగాలు చేస్తే ఒకొక్క భాగం 3.75 డిగ్రీలు. ఈ డిగ్రీలని 60 పెట్టి గుణిస్తే 225 నిమిషాలు వస్తాయి. అవునా?

ఇప్పుడు మన శ్లోకం లోని మొదటిమాట "మఖీ" విలువ ఎంతో కడదాం.

మఖీ = 25 * (100 ** 0) + (2 * 100) = 225

కనుక "మఖీ" అంటే ఒక వృత్తంలోని తురీయంలో 24వ వంతు. ఇలాగే శ్లోకం అంతా ఓపిక పట్టి అర్థం చేసుకోవచ్చు.

ఇదే విధంగా వేదాలలో ఉన్న మంత్రాలు కూడ అర్థగర్భితమైనవి. ఆ సూక్ష్మం కూడ పరిశోధన చేసి కనుక్కోవచ్చు.

ఇలా అంకెలకి బదులు అక్షరాలు వాడడంలో ఆర్యభట్టు ప్రత్యేకత ఏమీ లేకపోవచ్చు. ఆర్యభట్టు కాలం (సా. శ. 500) నాటికి ఈ పద్దతి గ్రీకులకి, రోమనులకీ తెలుసు. ఆర్యభట్టు పద్ధతిలో చెప్పుకోదగ్గ అంశాలు రెండు ఉన్నాయి. ఒకటి, ఇక్కడ దశాంశ పద్దతిలో లెక్కించడం, స్థానబలం సూత్రం ఉపయోగించడం గమనించదగ్గ విషయాలు. ఆ రోజులలో ఈ రెండు భావాలు ఎవ్వరికీ తెలియవు. రెండవ విషయం, అచ్చులకీ, హల్లులకీ వివిధమైన విలువలని ఇచ్చి గుణింతాల ద్వారా పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలని సృష్టించి, వాటిని ఛందోబద్ధం చేసి శ్లోకాలుగా వ్రాయడం.

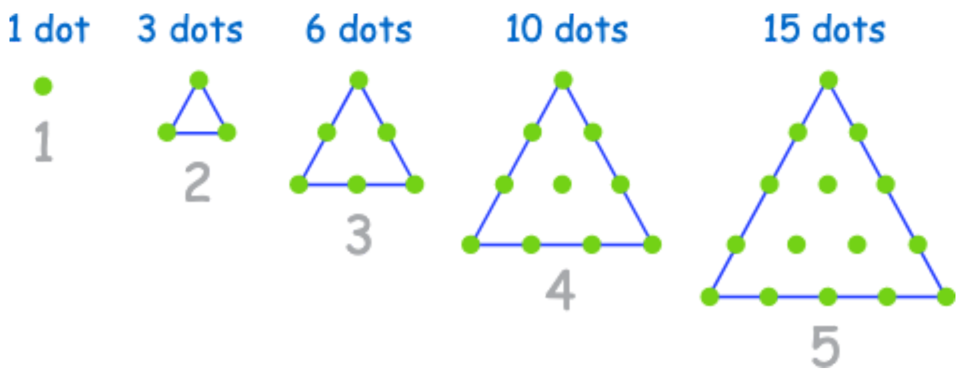
ఇంతకీ మనవాళ్ళకి పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలంటే ఎందుకు భయం లేకపోయింది? దీనికి శాస్త్రీయంగా సమాధానం చెప్పలేను కానీ, కొంతవరకు ఊహాగానం చెయ్యగలను. ఏమీలేకపోవడం అనే భావానికి సున్న అని పేరుపెట్టి గణితశాస్త్రంలో ఒక సంచలనం లేవదీశారు మనవాళ్ళు. అలాగే అంతు లేకుండా

లెక్కపెట్టడానికి “అనంతం” అనే భావాన్ని సృష్టించేరు. ఈ రెండూ ప్రాయోగికమైన అవసరాలు తీర్చుకుందికి సృష్టించినవి కాకపోవచ్చు. ఈ అవసరం తార్కికంగా వచ్చి ఉండవచ్చు. ఒకటికి ఒకటి కలిపితే రెండు వస్తుందని తెలిసిన తర్వాత, తాడి తన్నే వాడి తల తన్నేవాడుంటాడని తెలిసిన తర్వాత, పరంపరానుగతంగా, పుంఖానుపుంఖాలుగా వచ్చే సంఖ్యలకి అంతు ఉండదని ఊహించడం ఇప్పటి వెనుక చూపుతో తేలికే కాని ఆ రోజులలో ఇది పెద్ద ఘనకార్యమే అయి ఉంటుంది.

(27 డిసెంబరు 2001 “Nature”, పేజీ 851 లో ప్రచురించబడ్డ రొడ్డం నరసింహ గారి వ్యాసం సహాయంతో)

24. త్రిభుజ సంఖ్యలు

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,... వగైరాలని త్రిభుజ సంఖ్యలు అంటారు. ఎందుకనిట?

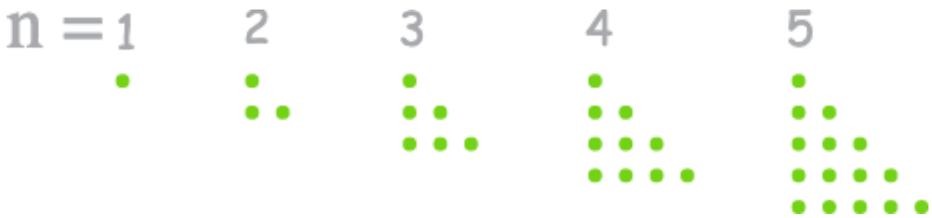


ఈ పైన చూపిన 5 బొమ్మలలో మొదటి బొమ్మలో ఒక చుక్క ఉంది. తరువాత ఆ చుక్క కింద రెండు చుక్కలు పెట్టి ఆ చుక్కల చుట్టూ ఒక త్రిభుజం గీసేము కదా. తరువాత ఆ త్రిభుజం కింద మూడు చుక్కలు పెట్టి ఆ చుక్కల చుట్టూ మరొక త్రిభుజం గీసేము. అటు తరువాత ఆ త్రిభుజం కింద నాలుగు చుక్కలు పెట్టి ఆ చుక్కల చుట్టూ మరొక పెద్ద త్రిభుజం గీసేము. ఇలా గీసుకుంటూ పోతే వచ్చే బొమ్మలలో మొత్తం ఎన్నెన్ని చుక్కలు ఉంటాయో లెక్కపెడితే మనకి 1, 3, 6, 10, 15, … వగైరా వస్తాయి. వీటినే త్రిభుజ సంఖ్యలు అంటారు.

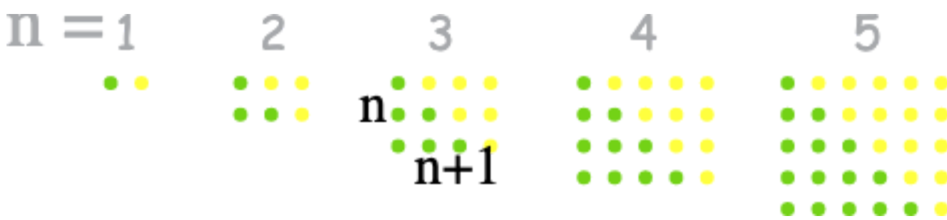
- మొదటి “త్రిభుజం”లో 1 చుక్క ఉంది.
- రెండవ త్రిభుజంలో, రెండవ వరుసలో 2 చుక్కలు ఉన్నాయి కనుక, వెరసి మొత్తం 1 + 2 = 3 చుక్కలు.
- మూడవ త్రిభుజంలో, మూడవ వరుసలో 3 చుక్కలు ఉన్నాయి కనుక, వెరసి మొత్తం 1 + 2 + 3 = 6 చుక్కలు.

ఈ బాణీని ఇలా కొనసాగించుకుంటూ పోతే 60 వ త్రిభుజంలో ఎన్ని చుక్కలు ఉంటాయి?

ఈ ప్రశ్నకి సమాధానం చెప్పడానికి ఒక కిటుకు ఉపయోగిద్దాం. మొదట మన త్రిభుజాలని ఈ దిగువ చూపిన విధంగా అమర్చుదాం.



ఇప్పుడు చుక్కలని రెట్టింపు చేసి దీర్ఘచతురస్ర ఆకారాలుగా అమర్చుదాం.



ఇప్పుడు ప్రతి దీర్ఘచతురస్రం లోను ఎన్ని చుక్కలు ఉన్నాయో చెప్పడం తేలిక: n x (n + 1).

ఇప్పుడు ప్రతి త్రిభుజం లోను ఎన్ని చుక్కలు ఉన్నాయో చెప్పడం ఇంకా తేలిక: n x (n + 1)/2.

ఇప్పుడు $x\ (n)$ అనేది n-వ త్రిభుజం లో ఉండే చుక్కలు అనుకుంటే

$$x(n) = n\ (n + 1)/2$$

ఈ లెక్క దోషరహితం అవునోకాదో తేల్చుకోడానికి మొదట 5-వ త్రిభుజంలోఎన్ని చుక్కలు ఉండాలో ఈ సూత్రం ఉపయోగించి లెక్కవేద్దాం.

$$x\ (5) = 5\ (5 + 1)/2 = 15$$

సరిపోయింది కదా. ఇప్పుడు 60-వ త్రిభుజంలో ఎన్ని చుక్కలున్నాయో కావాలనుకుంటే, n = 60 ప్రతిక్షేపించాలి. అనగా,

$$x\ (60) = 60\ (60 + 1)/2 = 1830$$

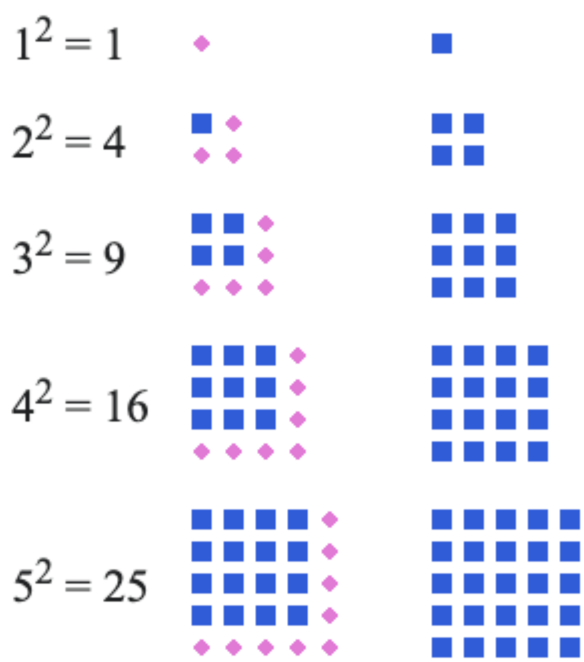
పైన చూపిన $n\,(n\ +\ 1)/2$ అనే సూత్రం ఉన్నత పాఠశాలలోనే నేర్చుకుని ఉంటారు కదా. అటువంటప్పుడు ఈ సోది అంత నేను తిరిగి ఎందుకు చెప్పినట్లు? ఏమీతోచనప్పుడు కాలక్షేపానికి వీళ్ళమీద వాళ్ళమీద నేరాలు చెప్పుకుంటూ కూర్చోడానికి బదులు ఇలాంటి ఆటలు మెదడుకి మేతగా పనికివస్తాయి.

జగద్విఖ్యాతి చెందిన గౌస్ (Gauss) మూడేళ్ళ బాలుడిగా ఉన్నప్పుడు పెంకితనం చేస్తూ ఉంటే, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అనే అంకెలని పలక మీద రాసి, “అల్లరి మాని వీటన్నిటిని కూడి మొత్తం ఎంతో చెప్పు?” అని పంపేరుట. గౌస్ ఆలోచించడానికి వ్యవధి కూడా తీసుకోకుండా 45 అని ఠకీమని సమాధానం చెప్పేడుట. “ఎలా చేసేవురా, పిడుగా!” అని అడిగితే, “మొదట ఉన్న 1 కి చివర ఉన్న 9 కలిపితే 10 కదా. తరువాత ఉన్న 2 కి 8 కలిపితే 10 కదా… “ అని సమాధానం చెప్పేడుట! ఈ రోజలలో మాలాంటి వాళ్ళకి గౌస్ పేరు తలుచుకోకుండా రోజ గడవదు!!

25. చతురస్ర సంఖ్యలు

గణితంలో ఒక పూర్ణ సంఖ్య (integer) ని అదే సంఖ్యతో గుణించగా వచ్చిన సమాధానాన్ని వర్గ సంఖ్య (square number) అంటారు. ఉదాహరణకి 3 ని 3 చేత గుణించగా 9 వస్తుంది కనుక 9 ని వర్గ సంఖ్య అంటారు. దీనిని సంప్రదాయికంగా 3^2 = 3^2= 9 అని రాస్తారు కాని 3 x 3 = 9 అని రాయరు. కానీ మనం ఇక్కడ రెండు పద్ధతులలోనూ రాద్దాం; కొంపేమీ మునిగిపోదు.

ఉదాహరణకి 1, 4, 9, 16, 25, 36, … వగైరాలు వర్గ సంఖ్యలు. వీటిని చతురస్ర సంఖ్యలు అని కూడా అంటారు. ఎందుకంటే ఒక వర్గ సంఖ్యతో సమానమైన “పూసలని” ఒక చతురస్రం రూపంలో అమర్చవచ్చు. (బొమ్మ చూడండి.) సున్నవ వర్గ సంఖ్య 0^2 = 0, n వ వర్గ సంఖ్య n^2.



ఒక పూస ఒక బిందువు (point)ని సూచిస్తుందని అనుకుందాం.

రెండు పూసలని ఒకదాని పక్క మరొకటి పేర్చి దానితో ఒక గీత (line) ని సూచించవచ్చు.

మూడు పూసలని వరసగా పేర్చి ఒక సరళరేఖ (straightline) ని సూచించవచ్చు. కనుక 1, 2, 3,... వగైరాలని సరళ సంఖ్యలు అందాం. ఇప్పుడు నిజానికి ఒక పూస ఒక శిధిలమైన (degenerate) సరళ రేఖని సూచిస్తుందని వ్యాఖ్యానించవచ్చు!

ఇదే ధోరణిలో ఒక పూస ఒక శిధిలమైన (degenerate) త్రిభుజాన్ని సూచిస్తుందని కూడా అనుకోవచ్చు.

ఆ ఒక పూస కింద మరో రెండు పూసలని చేర్చి, మూడు పూసలతో చిన్న త్రిభుజాన్ని (triangle) ని సూచించవచ్చు.

పైన రెండో వరసలో ఉన్న రెండు పూసలకి దిగువన మరో మూడు పూసలని చేర్చి, మొత్తం ఆరు పూసలతో మరికొంచెం పెద్ద త్రిభుజం (triangle) నిర్మించవచ్చు.

కనుక 1, 3, 6, 10, 15, వగైరాలని త్రిభుజ సంఖ్యలు (triangle numbers) అందాం. ఇప్పుడు నిజానికి ఈ వరసలో ఉన్న మొదటి పూస ఒక శిధిలమైన (degenerate) త్రిభుజం అన్నమాట!

ఇదే ధోరణిలో 1, 4, 9, 16, 25, వగైరాలు చతురస్ర సంఖ్యలు (square numbers) అవుతాయి. 1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2 కనుక 1, 4, 9, 16, 25, వగైరాలని వర్గ సంఖ్యలు అని కూడా అనవచ్చు. ఇక్కడ square అనే మాటకి రెండు అర్థాలు వచ్చేయి, గమనించేరా? ఒకటి "వర్గ", మరొకటి "చదరం."

ఇప్పుడు వర్గ సంఖ్యల లక్షణాలలో కొన్నింటిని చూద్దాం.

(1) బేసి సంఖ్యల వర్గలని 8 చేత భాగిస్తే ఎల్లప్పుడు 1 శేషంగా మిగులుతుంది.

ఉదా. 1^2 = 1 ని 8 చేత భాగిస్తే శేషం 1.
3^2 = 9 ని 8 చేత భాగిస్తే శేషం 1.

(2) వర్గ సంఖ్యలని 5 చేత భాగిస్తే ఎల్లప్పుడు 0 కాని, 1 కాని, 4 కాని శేషంగా మిగులుతుంది.

ఉదా. 1 ని 5 చేత భాగిస్తే శేషం 1.

4 ని 8 చేత భాగిస్తే శేషం 1.

9 ని 8 చేత భాగిస్తే శేషం 1.

(3) n^2 అనే వర్గ సంఖ్యని తీసుకొండి. దీని విలువ మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం అవుతుంది.

ఉదా. 5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9

ఉదా. 4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7

చతురస్రాల మీద చర్చ సమాప్తం చేసే ముందు ఒక చిన్న గణిత సమీకరణాన్ని తయారు చేసి చూపిస్తాను. ఒక చతురస్రంలో ఎన్ని పూసలు ఉన్నాయో తెలిస్తే దానికి మరెన్ని పూసలు జత చేస్తే తరువాత చతురస్రం వస్తుంది? అనగా 2x2 చతురస్రానికి ఎన్ని పూసలు కలిపితే 3x3 చతురస్రం వస్తుంది? 3x3 చతురస్రానికి ఎన్ని పూసలు కలిపితే 4x4 చతురస్రం వస్తుంది? nxn చతురస్రానికి ఎన్ని పూసలు కలిపితే (n+1)x(n+1) చతురస్రం వస్తుంది? దీనికి సమాధానంగా ఈ దిగువ సమీకరణాన్ని ఇస్తున్నాను:

n^2 + (2n + 1) = $(n + 1)^2$

దీనిని అర్థం చేసుకోవాలంటే పైన చూపిన బొమ్మని మరొకసారి చూడండి. అందులో నీలం పూసల చదరానికి ఎన్ని ఎర్ర పూసలు తగిలిస్తే తరువాత చదరం వస్తుందో చూడండి. ఇప్పుడు పైన చూపిన సమీకరణాన్ని మరొకసారి చూసి జరుగుతూన్న ప్రక్రియ అర్థం చేసుకొండి.

బీజగణితంలో వచ్చే బ్రహ్మగుప్త-ఫిబొనాచీ సర్వసమీకరణం (identity) ని ఒక సారి ప్రస్తావించి ఈ చర్చని ఆపుతాను.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \qquad (1)\\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

ఈ సర్వసమీకరణంలో ఎడం పక్కన “రెండు మొత్తాల లబ్ధం” (product of two sums) ఉంది కదా. ఈ “మొత్తం"లో పాల్గొనేవి నాలుగు వర్గ సంఖ్యలు. దీనిని రెండు వర్గుల మొత్తం (sum of two squares) గా, రెండు విధాలుగా రాయవచ్చని బ్రహ్మగుప్తుడు (598-688) బ్రహ్మస్ఫుతసిద్ధాంతం అనే గ్రంథంలో రాసేడు. అదే విషయాన్ని ఫిబొనాచీ 1225 లో మళ్ళా కనుక్కున్నాడు. దీనికి ఉదాహరణగా ఈ కింది సమీకరణం చూడండి:

ఇలాంటి “ఆటలు” ఇంకా చాలా ఉన్నాయి కానీ, ప్రస్తుతానికి ఇక్కడితో ఆపుతాను.

26.మీకు తెలుసా?

1. మనం రోజూ వాడుకునే 1, 2, 3, … వగైరా అంకెలు మన దేశానివే. వీటి వాడకం 1000 సంవత్సరాల క్రితమే భారత దేశంలో ఉంది కానీ పదిహేనవ శతాబ్దం వరకు పాశ్చాత్య దేశాలలో ఊపు అందుకోలేదు. ఇవేవో పరాయి దేశపు స్వరూపాలు అనుకుని మనం పంచాంగాలలోను, మోటారు బండ్ల లైసెన్సు పళ్లేల మీద "తెలుగు అంకెలు" వాడుతూ ఉంటాం.

2. సున్న (0) ని మన దేశంలో బ్రహ్మగుప్తుడు సా. శ. 600 లో మొట్టమొదట వాడడం మొదలు పెట్టేడు. సంస్కృతంలో "శూన్య" అన్న మాట దేశాంతరాలలో క్రమేపీ మార్పు చెంది cipher గానూ, zero గానూ మారింది.

3. దశాంశ పద్ధతి , స్థాన బలం సూత్రం కూడా భారతదేశంలోనే పుట్టేయి.

4. ఫిబొనాచీ (సా. శ. 1170-1250) సంఖ్యలు అని మనం చెప్పుకునే సంఖ్యా క్రమం, అనగా, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., భారతదేశంలో అంతకు పూర్వం హేమచంద్ర (సా. శ. 1089-1173) కనుక్కున్నాడని మంజుల్ భార్గవ అన్నారు. అంతకు పూర్వం పింగళ తన ఛందశ్శాస్త్రం లో ఈ శ్రేణి గురించి ప్రస్తావించేడు.

5. పైథాగొరోస్ సిద్ధాంతం అని మనం పిలుస్తున్న సూత్రం పైథాగొరోస్ కి 1000 సంవత్సరాలకి ముందే బాబిలోనియాలో తెలుసు. పైథాగొరోస్ కాలం నాటికి చైనా లోనూ భారత్ లోను కూడా తెలుసు.

6. ప్రధాన సంఖ్యలలో 2 తోటి 5 తోటి అంతం అయేవి 2, 5 మాత్రమే.

7. ప్రధాన సంఖ్యలలో 2 ఒక్కటే సరి సంఖ్య.

8. సున్న (0) ని సరి సంఖ్య గానే పరిగణిస్తారు.

9. అంతర్జాలంలో బహుళ ప్రచారం పొందిన “గూగుల్” శోధన యంత్రం గూగోల్ అన్న మాటని వర్ణక్రమ దోషంతో రాయడం వల్ల సిద్ధించింది. గూగోల్ అంటే 1 తరువాత 100 సున్నలు.

10. “గూగోల్ ప్లెక్స్ “ అంటే 1 తరువాత గూగోల్ సున్నలు. ఇది ఎంత “పేద్ద” సంఖ్య అంటే ఈ సంఖ్యని రాయడానికి విశ్వము అంత కాగితం ఉన్నా సరి పోదు.

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు తెలుగు పుస్తకాలు

1. English-Telugu & Telugu-English Dictionary & Thesaurus, Asian Educational Services, New Delhi, 2002. ఈ నిఘంటువుని తెలుగు వికీపీడియాలో, వికీబుక్స్ లో ఉచితంగా కూడ సంప్రదించవచ్చు.
    (a) Vemuri Dictionary Short URL
    https://tinyurl.com/Vemuri-Dictionary
    (b) PDF copies of all the books listed below are available for FREE download at http://www.maganti.org/ click on వ్యాసావళి

2. జీవరహశ్యం, ప్రతులు అలభ్యం
3. రసగంధాయ రసాయనం, ప్రతులు అలభ్యం
4. అమెరికా అనుభవాలు, ఎమెస్కో , ప్రతులు అలభ్యం
5. కించిత్ భోగో భవిష్యతి, (వైజ్ఞానిక కథలు),
6. అలనాటి అమెరికా అనుభవాలు,
7. జీవనది: రక్తం కథ
8. నిత్యజీవితంలో రసాయనశాస్త్రం
9. విశ్వస్వరూపం
10. ప్రాణి ఎలా పుట్టింది?
11. మహాయానం, (వైజ్ఞానిక కల్పనలు)
12. తెలుగులో కొత్త మాటలు
13. ఒకటి, రెండు, మూడు, … అనంతం
14. మన నాయకులకి కావలసిన భౌతిక శాస్త్రం
15. రామానుజన్ నుండి ఇటూ అటూ
16. ఫెర్మా చివరి సిద్ధాంతం
17. చుక్కల్లో చంద్రుడు: చంద్రశేఖర్ చరిత్ర
18. గ్రీసు దేశపు పురాణ కథలు
19. ఎం? ఎందుకని? సిగ్గెందుకని?

వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు జీవిత సంగ్రహం

భారతదేశంలో తుని, మచిలీపట్నం, కాకినాడలలో విద్యాభ్యాసం. ఉన్నత విద్యకి 1961 లో అమెరికా ప్రయాణం. ప్రస్తుతం యూనివర్సిటీ ఆఫ్ కేలిఫోర్నియా, డేవిస్ కేంద్రంలో విశ్రాంత ఆచార్యులు. నివాసం ప్లెజంటన్, కేలిఫోర్నియాలో. సైన్సు విషయాల మీద విశేషంగా తెలుగులో రాసేరు. యూనివర్సిటీ ఆఫ్ కేలిఫోర్నియా, బర్క్లు కేంద్రంలో తెలుగు పీఠం స్థాపించడానికి 2006 నుండి అవిరామంగా పాటుపడుతున్నారు. శాశ్వత నిధి 2022 నాటికీ $550,000 చేరుకుంది.